ELEMENTI DI MECCANICA

1 Nozioni fondamentali

Giovanni Buccolieri

Università del Salento, Dipartimento Matematica e Fisica

e-mail: giovanni.buccolieri@unisalento.it

Grandezze fisiche

- La fisica permette di descrivere i fenomeni naturali
- Per fare ciò introduce delle grandezze fisiche
- Esempi: spazio, tempo, massa, forza, energia, momento angolare, …
- Nell'insieme delle grandezze fisiche se ne individuano alcune come fondamentali: le altre, dette secondarie, possono essere definite come combinazioni delle fondamentali

Unita` di misura

- Affinchè un concetto possa essere considerato una grandezza fisica, è necessario poter effettuare su di esso una misura quantitativa
- Per ogni grandezza fisica fondamentale si è scelto un campione che funge da riferimento per le operazioni di misura
- Questi campioni sono le unità di misura
- Per le grandezze derivate le unità di misura sono definite in termini delle unità delle grandezze fondamentali
- Tutte le possibili quantità di una grandezza fisica vengono espresse come rapporto rispetto all'unità scelta

Sistemi di unità di misura

- Non solo le unità, ma anche il tipo di grandezze fondamentali può variare da sistema a sistema
- Esempi:
  - Sistema Internazionale (SI, evoluzione dell'MKS): lunghezza, massa, tempo (corrente elettrica, …)
  - Sistema cgs: lunghezza, massa, tempo
  - Sistema pratico: lunghezza, forza , tempo

Grandezze fondamentali

Unita di misura nel Sistema Internazionale (SI)

Grandezza	Unita misura
Lunghezza	Metro – m
Massa	Chilogrammo - kg
Tempo	Secondo - s
Temperatura termodinamica	Kelvin - K
Intensità corrente	Ampere - A
Quantità di materia	Mole - mol
Intensità luminosa	Candela - cd

Potenza	Prefisso	Abbrev.
10^{-24}	yotto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{3}	chilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

	Lunghezza (m)
Distanza dalla Terra alla più lontana quasar nota	1.4×10^{26}
Distanza dalla Terra alla più lontana galassia normale nota	4×10^{25}
Distanza dalla Terra alla più vicina grande galassia (M 31 in Andromeda)	2×10^{22}
Distanza dal Sole alla stella più vicina (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Un anno-luce	9.46×10^{15}
Raggio orbitale medio della Terra	1.5×10^{11}
Distanza media Terra-Luna	3.8×10^{8}
Distanza dall'equatore al polo nord	1×10^{7}
Raggio medio della Terra	6.4×10^{6}
Tipica altezza di un satellite terrestre orbitante	2×10^{5}
Lunghezza di un campo di calcio	9.1×10^{1}
Lunghezza di una mosca domestica	5×10^{-3}
Dimensione della più piccola particella di polvere	1×10^{-4}
Dimensione delle cellule della maggior parte degli organismi viventi	1×10^{-5}
Diametro di un atomo di idrogeno	1×10^{-10}
Diametro di un nucleo di uranio	1.4×10^{-14}
Diametro di un protone	1×10^{-15}

Valori approssimati di alcune lunghezze

Masse di alcuni corpi

	Massa (kg)
Universo	10^{52}
Via Lattea (galassia)	10^{42}
Sole	2×10^{30}
Terra	6×10^{24}
Luna	7×10^{22}
Squalo	3×10^{2}
Uomo	7×10^{1}
Rana	1×10^{-1}
Zanzara	1×10^{-5}
Batterio	1×10^{-15}
Atomo di idrogeno	1.67×10^{-27}
Elettrone	9.11×10^{-31}

	Intervallo (s)
Età dell'Universo	5×10^{17}
Età della Terra	1.3×10^{17}
Tempo dalla caduta dell'Impero Romano	5×10^{12}
Età media di uno studente universitario	6.3×10^{8}
Un anno	3.2×10^{7}
Un giorno (tempo per una rivoluzione della Terra attorno al suo asse)	8.6×10^{4}
Tempo fra normali battiti cardiaci consecutivi	8×10^{-1}
Periodo di un'onda sonora nell'udibile	1×10^{-3}
Periodo di una tipica onda radio	1×10^{-6}
Periodo di vibrazione di un atomo in un solido	1×10^{-13}
Periodo di un'onda luminosa nel visibile	2×10^{-15}
Durata di una collisione nucleare	1×10^{-22}
Tempo richiesto dalla luce per attraversare un protone	3.3×10^{-24}

Valori approssimati di alcuni intervalli di tempo

Costanti fondamentali

velocità della luce nel vuoto	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
carica elettrica dell'elettrone	$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
massa dell'elettrone	$m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	$M = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
costante di Planck	$h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J s
numero di Avogado	$N_o = 6.02 \cdot 10^{23}$ mole^{-1}
costante dei gas perfetti	$R = 8.3$ J K^{-1} mole^{-1} = 0.082 litri atm K^{-1}
costante di Boltzmann	$k = R/N_o = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
costante di Faraday	$F = N_o e = 96487$ C mole^{-1}
costante dielettrica del vuoto	$\varepsilon_o = 8.86 \cdot 10^{-12}$ C^2 N^{-1}m^{-2}
costante gravitazionale	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
permeabilità del vuoto	$\mu_o = 1.256 \cdot 10^{-6}$ kg m C^{-2}
costante di Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ watt m^{-2} K^{-4}
costante di Wien	$b = 2.897 \cdot 10^{-3}$ m K
equivalente meccanico della caloria	$J = 4.18$ joule/caloria

Diversi sistemi di unità di misura

GRANDEZZE FONDAMENTALI	S.I.	C.G.S.	SISTEMI PRATICI
massa	kilogrammo	grammo	grammomolecola
lunghezza	metro	centimetro	angstrom
tempo	secondo	secondo	minuto, ora
corrente elettrica	ampere		
GRANDEZZE DERIVATE			
volume	m^3	cm^3	litro
densità	$kg\ m^{-3}$	$g\ cm^{-3}$	
forza	$kg\ m\ s^{-2}$ (newton)	$g\ cm\ s^{-2}$ (dyna)	kg_{peso}
velocità	$m\ s^{-1}$	$cm\ s^{-1}$	$mm\ s^{-1}$, km/ora
pressione	newton m^{-2} (pascal)	dyna cm^{-2} (baria)	atmosfera, mmHg, cmH_2O
lavoro, energia, calore	$kg\ m^2 s^{-2}$ (joule)	$g\ cm^2 s^{-2}$ (erg)	caloria, Caloria
carica elettrica	$s \cdot$ ampere (coulomb)	u.e.s.	

GRANDEZZA FISICA	FATTORI DI CONVERSIONE
lunghezze	1 micron (μm) = 10^{-4} cm
	1 angstrom (Å) = 10^{-8} cm
volumi	1 litro = 1000 cm^3
forze	1 dyna = 10^{-5} newton
pressioni	1 torr (1 mmHg) = $1.333 \cdot 10^2\ N \cdot m^{-2}$
	1 atm = 760 torr = $1.013 \cdot 10^5\ N \cdot m^{-2} = 1.013 \cdot 10^6$ dyne cm^{-2}
lavoro ed energia	1 erg = 10^{-7} joule (J)
	1 cal = 4.18 J
	1 kWh = $3.6 \cdot 10^6$ J
potenza	1 hp = 735 W
densità	1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3
concentrazione	1 g/litro = 10^{-3} g/cm^3
velocità angolare	1 giro/s = 6.28 rad/s
flusso (portata)	1 litro/min = 16.6 cm^3/s

Dimensioni fisiche

- Esse si indicano racchiudendo il simbolo della grandezza derivata tra parentesi quadre:
  – Grandezza *X*
  – Dimensione di *X*: *[X];*
- Per le grandezze fondamentali le dimensioni si indicano: con il simbolo *L* per lo spazio, *T* per il tempo, *M* per la massa (*Q* per la carica ecc)
- E' importante non confondere il concetto di **dimensione** con quello di **unità di misura**
- Ad esempio:
  – la densità può essere espressa sia in unità di kg/m^3 che in quelle di g/cm^3 (unità di misura)
  – entrambe le scelte sono consistenti con le dimensioni fisiche di M/L^3

Dimensione fisica

- Esempi:
  - *Velocità* $[v]=L/T=L\,T^{-1}=L\,T^{-1}\,M^{0}$
  - *Angolo* $[\theta]=L/L=L^{0}=L^{0}\,T^{0}\,M^{0}$
  - *Energia cinetica* $[K]=M[v^{2}]$

- Le espressioni precedenti sono esempi di equazioni dimensionali
- Dalla prima vediamo che è consentito usare sia il simbolo di frazione che quello di esponente negativo e che alcuni esponenti possono essere nulli.
- Dalla seconda relazione vediamo che una grandezza può avere dimensioni nulle, cioè tutti gli esponenti delle grandezze fondamentali nulli; grandezze <u>adimensionali</u> (non numeri puri)
- Dalla terza, che nel membro di destra si possono usare anche dimensioni di grandezze derivate.

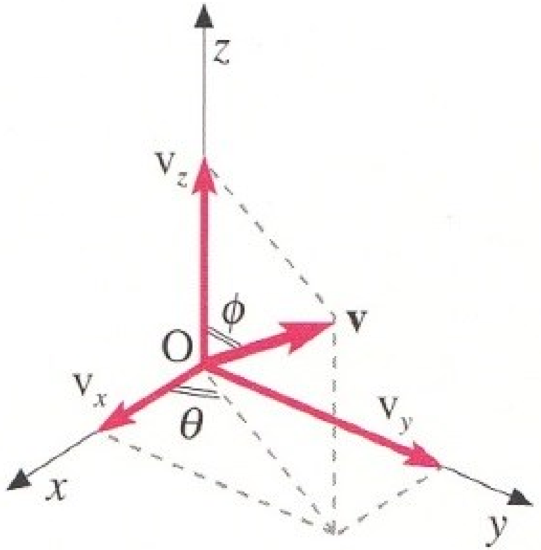
Principio di omogeneità

- Due o più grandezze sono dette omogenee se sono dello stesso tipo (stesse dimensioni fisiche)
- Ogni equazione fisica deve rispettare il **principio di omogeneità**, che stabilisce che i due membri di un'equazione devono essere omogenei e quindi devono avere le stesse dimensioni fisiche

- Il principio di omogeneità deriva dal fatto che un’uguaglianza o una somma non hanno senso se non tra grandezze della stessa specie: un’equazione che non rispetti questa regola è sicuramente errata
- Se un’equazione contiene più addendi, tutti quanti devono avere le stesse dimensioni fisiche
- L’analisi dimensionale di un’equazione, benché fornisca soltanto una condizione necessaria, ma non sufficiente, è uno strumento molto efficace per verificare la correttezza dei calcoli

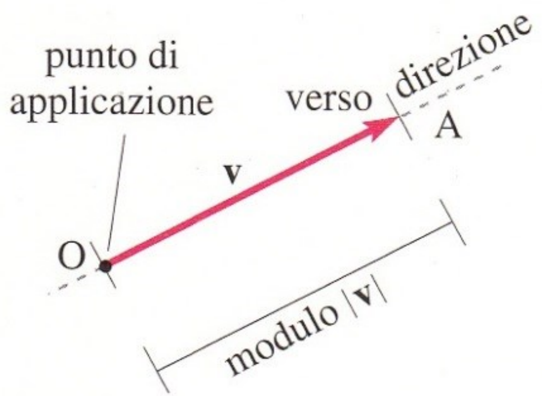
Sistemi di riferimento

- I sistemi più usati in fisica per descrivere moti in 2-D sono:
  - Sistema cartesiano: x, y
  - Sistema polare: ρ, ϕ (distanza radiale, azimut)
- E per descrivere moti in 3-D sono:
  - Sistema cartesiano: x, y, z
  - Sistema cilindrico: ρ, ϕ, z (distanza radiale, azimut, z)
  - Sistema sferico: r, θ, ϕ (distanza radiale, angolo polare, azimut)



Tipi di grandezze

- Le grandezze fisiche sono di diversa natura: possono essere individuate da un solo numero oppure da più numeri
- Esempi:
  - la temperatura in un punto di una stanza è definita da un solo numero
  - La massa di un corpo è definita da un solo numero
  - La velocita` di un corpo ha bisogno in generale di tre numeri che ne indichino l'intensità, la direzione e il verso
- Nei primi due casi la grandezza è detta **scalare**, nel secondo **vettoriale**



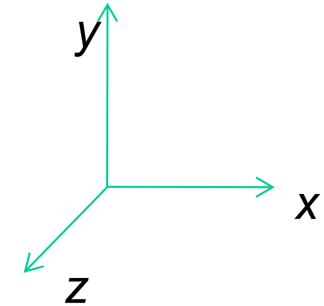
Esempio di vettore

Vettori

In realtà una grandezza, per essere definita vettoriale, deve soddisfare a qualche richiesta uteriore:

- Deve essere definita un'operazione di somma (+) fra le grandezze
- L'insieme delle grandezze deve essere chiuso rispetto alla somma
- La somma deve essere associativa
- Deve esistere l'elemento nullo (è unico)
- Ogni elemento deve possedere un elemento opposto
- La somma deve essere commutativa

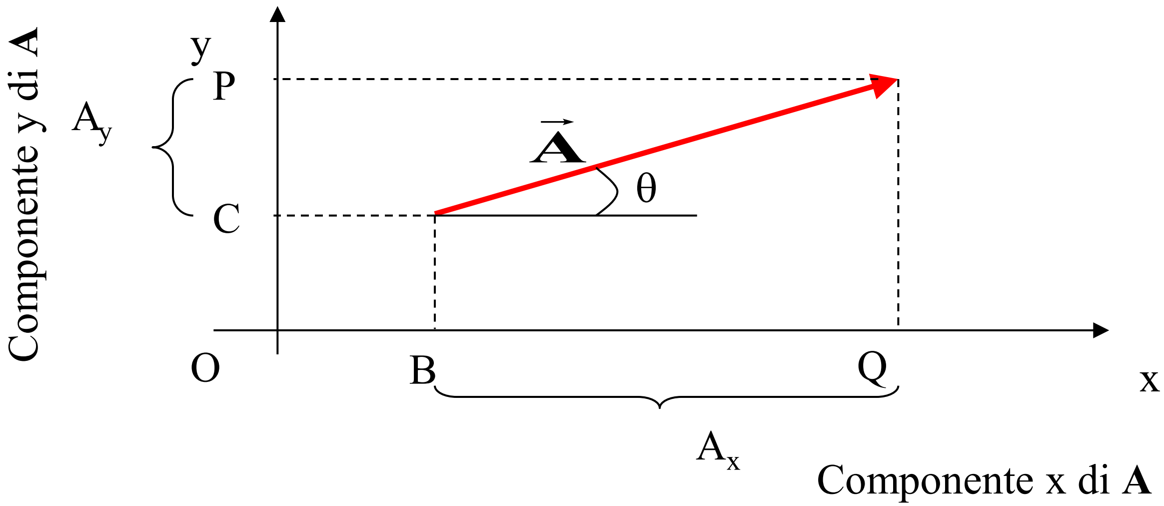
Esistono vettori particolari, detti <u>versori</u> o vettori unitari, in quanto hanno intensità unitaria (e dimensioni fisiche nulle)



$$\hat{i}\,, \hat{j}\,, \hat{k}$$

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$$

Scomposizione di un vettore



Consideriamo un vettore **A** e un sistema di riferimento cartesiano ortogonale **Oxy**

BQ=A cos θ = A_x , CP=A sen θ = A_y , A_y/A_x= tg θ

Prodotto scalare tra vettori in coordinate cartesiane

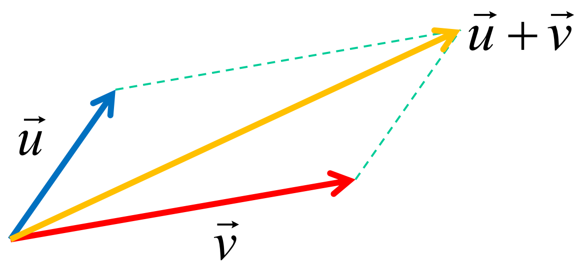
$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

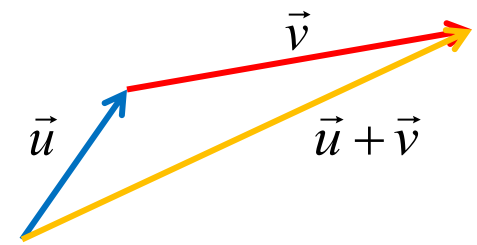
Prodotto vettoriale tra vettori in coordinate cartesiane

$(\mathbf{AxB})_\mathbf{x} = A_yB_z - A_zB_y$ $(\mathbf{AxB})_\mathbf{y} = (A_zB_x - A_xB_z)$ $(\mathbf{AxB})_\mathbf{z} = (A_xB_y - A_yB_x)$

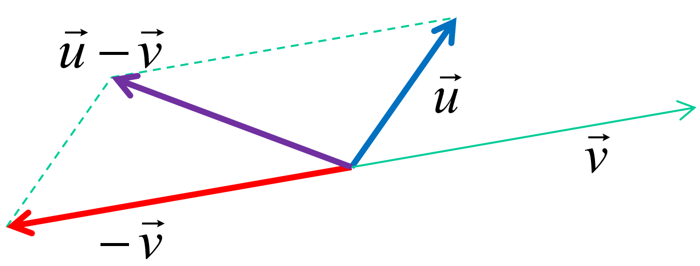
Operazioni sui vettori

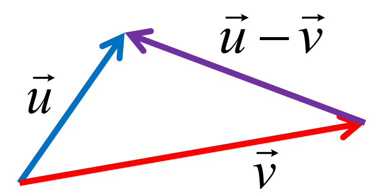
- Somma di due vettori





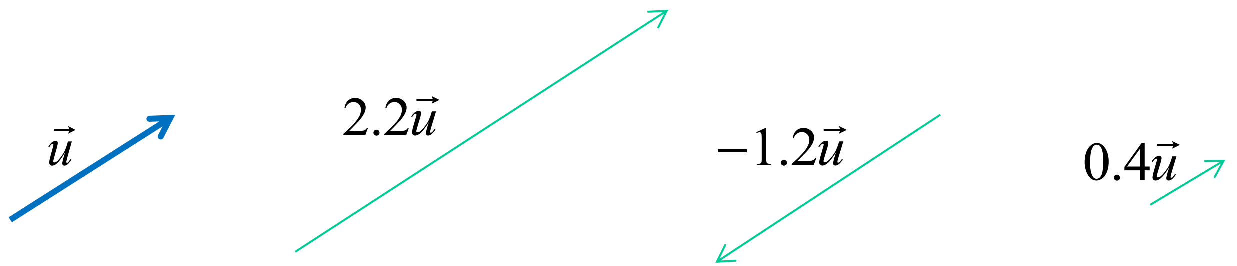
- Sottrazione di due vettori





Operazioni sui vettori

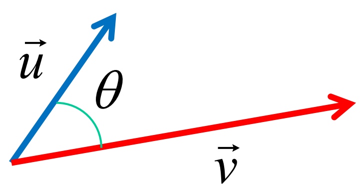
- Moltiplicazione di un vettore per un numero reale (o divisione, in tal caso il numero deve essere diverso da zero)



- Se il numero è negativo, il vettore risultante ha <u>verso opposto</u> a quello iniziale

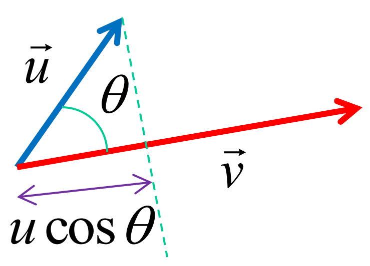
Prodotto scalare

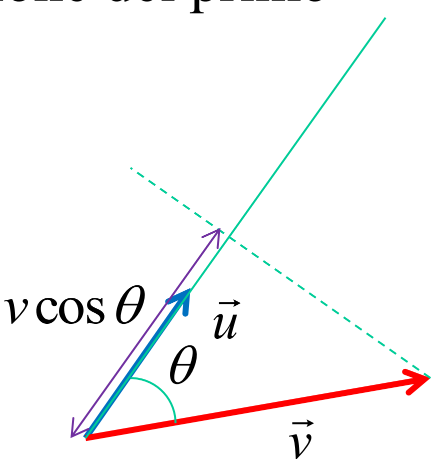
- E` definito per una qualunque coppia di vettori $\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}$ il simbolo dell'operazione è un punto: $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$
- E` uno scalare: $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{u}\mathbf{v}\cos\theta$ dato dal prodotto dei moduli dei vettori per il coseno del minore degli angoli definiti dai vettori



- Si può interpretare come il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro vettore lungo la direzione del primo

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\mathbf{u}\cos\theta) \qquad \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{u}(\mathbf{v}\cos\theta)$$





Prodotto scalare

- Il prodotto scalare è nullo quando uno dei due vettori è nullo <u>oppure quando i vettori sono perpendicolari</u>

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = uv\cos\theta = uv\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

- Dalla definizione segue che <u>il prodotto scalare è commutativo</u>: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Gode della proprietà distributiva: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$
- e associativa: $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}$
- Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$
- Si può anche scrivere

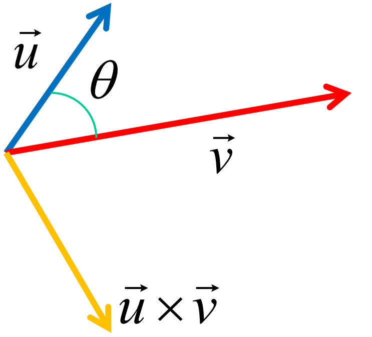
$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}|\cos 0 = |\vec{u}|^2 = u^2$$

Prodotto vettoriale

- E` definito per una qualunque coppia di vettori $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ e si indica con: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ **oppure** $\vec{\mathbf{u}} \wedge \vec{\mathbf{v}}$
- <u>E` un vettore</u> il cui <u>modulo</u> è dato dal prodotto dei moduli dei vettori per il seno del minore dei due angoli definiti dai vettori

$$\left|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\right| = \mathbf{uv\,sin\theta}$$

- Se uno dei due vettori è nullo o se i vettori sono paralleli, il prodotto è il vettore nullo
- Altrimenti la <u>direzione</u> è perpendicolare al piano definito dai vettori
- Il <u>verso</u> è tale che la terna di vettori $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ è destrorsa

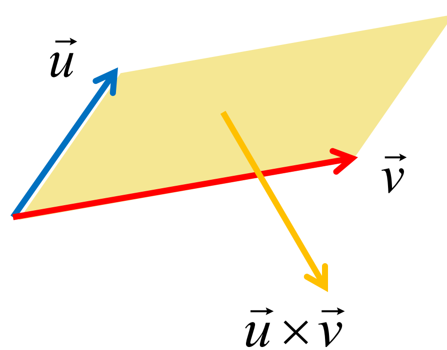


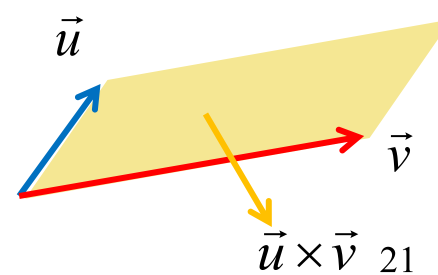
Prodotto vettoriale

- Il prodotto è nullo quando uno dei due vettori è nullo oppure quando i due vettori sono paralleli

$$\left|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\right| = \mathbf{uv\sin\theta = uv\sin 0 = 0}$$

- Il vettore prodotto è perpendicolare ad entrambi i vettori
- Dalla definizione segue che il prodotto vettoriale è anticommutativo $\quad \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$
- Interpretazione geometrica: rappresenta la superficie orientata del parallelogramma che ha per lati i due vettori; il suo modulo ne rappresenta l'area





Prodotto vettoriale

- Gode della proprietà distributiva: $(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})\times\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{w}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$
- e associativa: $\vec{\mathbf{u}}\times(\lambda\vec{\mathbf{v}})=\lambda(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})=(\lambda\vec{\mathbf{u}})\times\vec{\mathbf{v}}$
- Il prodotto vettoriale di due vettori uguali è il vettore nullo: $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$

Prodotto vettoriale

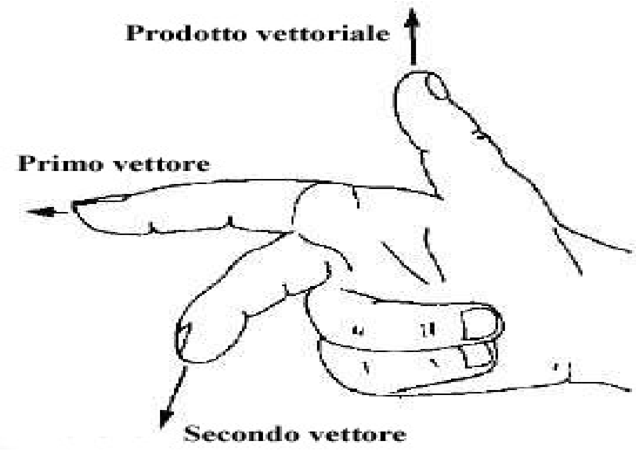
Preso un vettore **a** e un vettore **b**, si definisce prodotto vettoriale il vettore **c** definito:

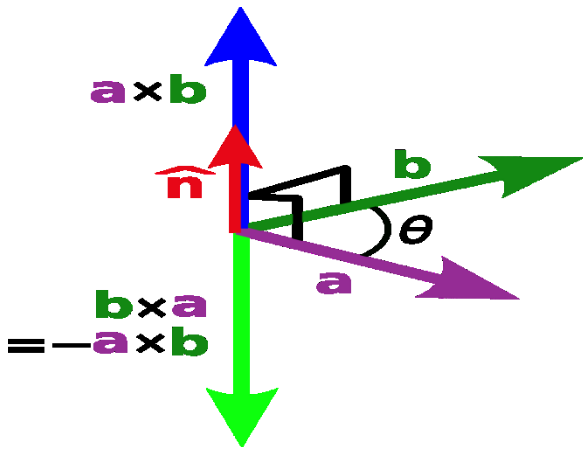
$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{c}}$$

•Modulo di **c**: a·b·senθ;

•Direzione di **c**: perpendicolare ad **a** e **b**;

•Verso di **c**: si determina con la regola delle tre dita della mano destra





Errori di Misura

Significato di “errore”

nelle scienze la parola **errore** non significa **sbaglio**

errore in senso scientifico è l’inevitabile **incertezza** presente nelle misure

L’errore è intrinseco al processo di misura (nessuna grandezza fisica è determinabile senza incertezza)

Importanza degli errori 1/2

Esempio:

Archimede affrontò il problema di verificare la composizione di una corona.

Occorre stabilire se l'oggetto è composto d'oro

densità$_{oro}$ = 15.5 g/cm^3

oppure di una lega metallica nota

densità$_{lega}$ = 13.8 g/cm^3

Esperto A

densità$_{corona}$ = 15 g/cm^3

Intervallo probabile di densità$_{corona}$: 13.5 g/cm^3 - 16.5 g/cm^3

Esperto B

densità$_{corona}$ = 13.9 g/cm^3

Intervallo probabile di densità$_{corona}$: 13.7 g/cm^3 - 14.1 g/cm^3

Importanza degli errori 2/2

Esperto A

densità$_{corona}$ = 15 g/cm^3

Intervallo probabile di densità$_{corona}$: 13.5 g/cm^3 - 16.5 g/cm^3

Esperto B

densità$_{corona}$ = 13.9 g/cm^3

Intervallo probabile di densità$_{corona}$: 13.7 g/cm^3 - 14.1 g/cm^3

Entrambi gli esperti hanno **giustificato** in modo soddisfacente sia la stima che il suo intervallo di probabilità: entrambi i risultati sono corretti!

Tuttavia l'unica misura utile è quella dell'esperto B poiché la sua maggiore **accuratezza** di misura fornisce l'informazione cercata.

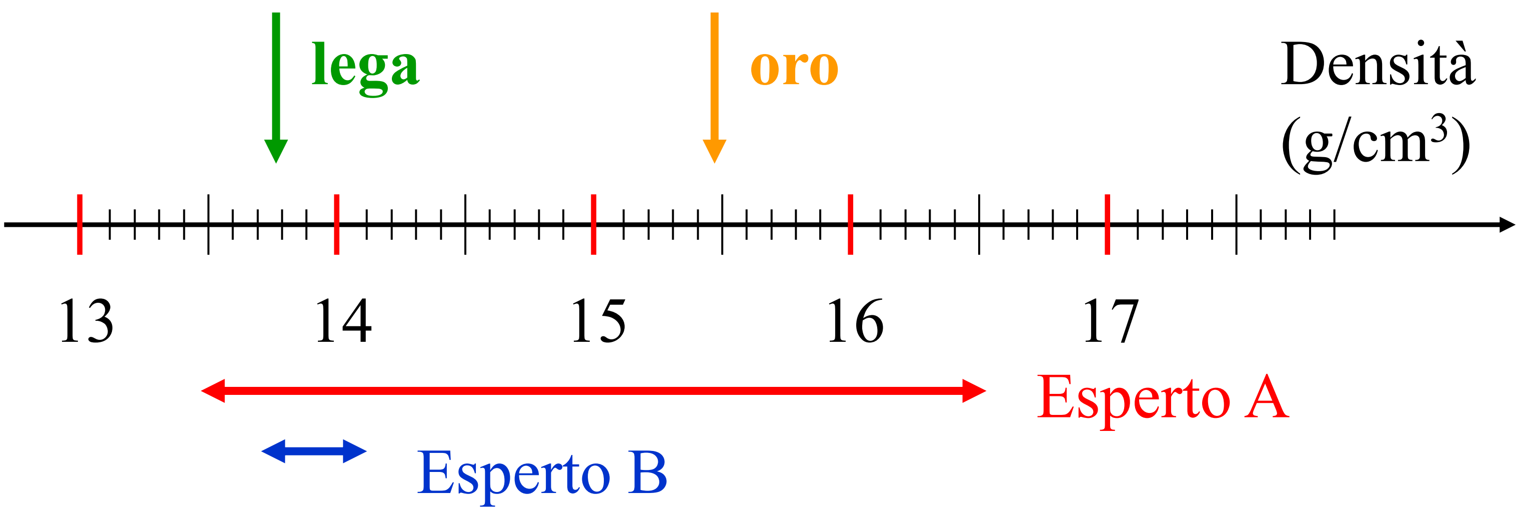
densità$_{oro}$ = 15.5 g/cm^3 - densità$_{lega}$ = 13.8 g/cm^3

Esperto A: (15.0±1.5) g/cm^3

densità$_{corona}$ = 15 g/cm^3, intervallo : 13.5 g/cm^3 - 16.5 g/cm^3

Esperto B: (13.9±0.2) g/cm^3

densità$_{corona}$ = 13.9 g/cm^3, intervallo : 13.7 g/cm^3 - 14.1 g/cm^3



Errori casuali e sistematici

Errori casuali

Incertezze che possono essere rivelate ripetendo le misure

Errori sistematici

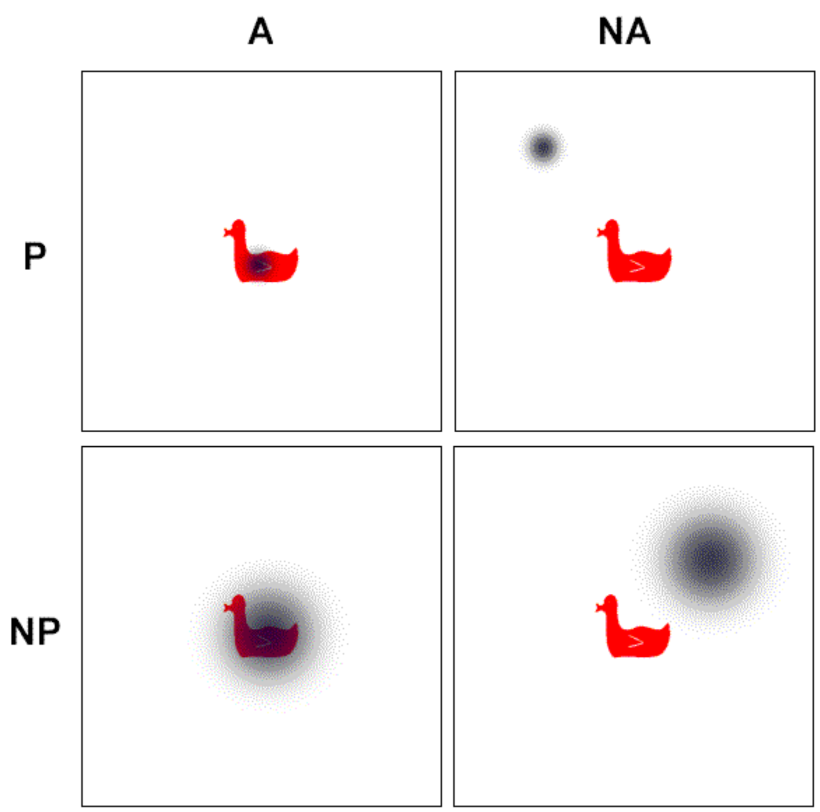
Incertezze che non possono essere rivelate ripetendo le misure

Esempio:
Misura del periodo di rotazione di un disco mediante un cronometro.

Una sorgente di errori casuali è il tempo di reazione dello sperimentatore: ripetendo la misura è naturale che alcune volte la partenza del cronometro sia anticipata ed altre posticipata. Su molte misure i due effetti si annullano.

Una sorgente di errori sistematici potrebbe essere presente se il cronometro fosse lento: in questo caso tutte le misure sarebbero sottostimate e ripetendo le misure molte volte l'effetto non verrebbe annullato.

Precisione (P) e Accuratezza (A)

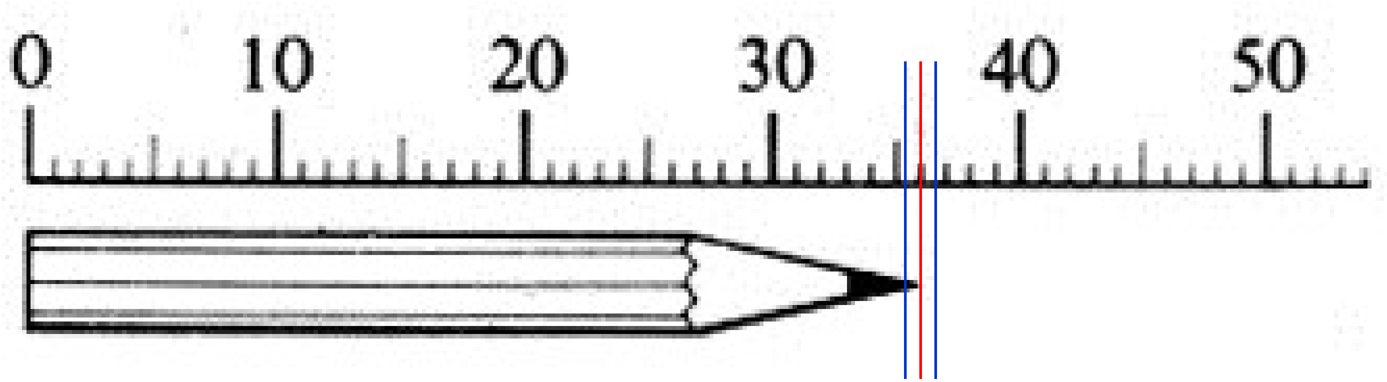


Una misura è tanto più **precisa** quanto più i singoli valori misurati in condizioni di ripetitibilità si concentrano intorno alla media della serie di misure effettuate.

L'**accuratezza** esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza.

Stima degli errori: lettura di scale

un esempio



La stima migliore della lunghezza L della matita è

L = 36 mm;

L'intervallo entro cui evidentemente è inclusa la lunghezza L è

35.5 mm < L < 36.5 mm

Convenzione: l'incertezza sulla lettura di una scala è la metà del più piccolo intervallo misurabile dallo strumento

Domanda:
La **parallasse** nella lettura di una scala produce errori casuali o sistematici?

Stima degli errori: misure ripetibili

un esempio

Misura del periodo di rotazione P di un disco mediante un cronometro in grado di apprezzare 0.1 s

In un caso del genere la stima dell'errore non è legata alla difficoltà di leggere la scala del cronometro, ma al tempo di reazione dello sperimentatore

Supponiamo di ripetere la misura di P 4 volte, ottenendo:

2.3 , **2.4** , **2.5** , **2.4** **secondi**

Intervallo di probabilità di P risulta:

2.3 s < P < 2.5 s;

la stima migliore del periodo P è il centro dell'intervallo:

P = 2.4 s

Rappresentazione degli errori

Convenzione

il risultato di una misura si rappresenta in forma di intervallo:

$$x \pm dx$$

(stima migliore ± incertezza) unità di misura

questo è l'intervallo all'interno del quale si trova la grandezza che si vuole misurare

Dagli esempi precedenti:

Lunghezza della matita (stima 36 mm, intervallo 35.5 mm<L<36.5 mm):

L = (36.0 ± 0.5) mm

Periodo della rotazione (stima 2.4 s, intervallo 2.3 s<P<2.5 s):

P = (2.4 ± 0.1) s

Cifre significative 1/2

Supponiamo di aver misurato l'accelerazione di gravità g:

$$\mathbf{g = (9.82 \pm 0.02385)\ m/s^2}$$

Significherebbe che g è inclusa nel seguente intervallo:

$$\mathbf{9.79615\ m/s^2 < g < 9.84385\ m/s^2}$$

Tuttavia, dal modo in cui abbiamo scritto la miglior stima di g, 9.82 m/s^2, è evidente che il nostro procedimento di misura può apprezzare valori con una accuratezza di 0.01 m/s^2. Di conseguenza ci aspettiamo che, ripetendo le misure, troveremo valori di g compresi nell'intervallo:

$$9.79615\ m/s^2 < \mathbf{9.80\ m/s^2 < g < 9.84\ m/s^2} < 9.84385\ m/s^2$$

Cifre significative 2/2

Pertanto ha senso considerare solo la prima cifra diversa da zero dell'incertezza, cioè dx = 0.02, e scriveremo:

$$\boldsymbol{g = (9.82 \pm 0.02)\ \mathrm{m/s^2}}$$

Convenzione: stima ed incertezza devono essere "troncate" in modo "sincrono". In particolare l'incertezza viene troncata alla prima cifra significativa tranne quando questa è pari ad 1 in cui si possono considerare due cifre significative.

Il risultato deve essere arrotondato alla prima o seconda cifra significativa dell'incertezza.

$$\begin{matrix} \mathbf{34{,}0967182736} \\ \pm \\ \mathbf{0{,}1703660271} \end{matrix} \quad = \mathbf{34{,}10 \pm 0{,}17} \ \ldots\ldots$$

La prima (seconda) cifra significativa dell'incertezza corrisponde alla prima (seconda) cifra della misura.

Cifre significative….

- Tutti i valori non nulli rappresentano cifre significative.

- gli zeri compresi tra digit non nulli sono cifre significative.
esempio: gli zeri in **verde** (tutti) sono significativi 45**0**6**00**2

- gli zeri che precedono la prima cifra significativa (digit non nullo) non sono cifre significative.
esempio: in **0.00**12, gli zeri (in **rosso**) non sono cifre significative (il numero in questione ha due sole cifre significative)

- Gli zeri finali sono significativi solo se presente la virgola (o punto decimale in inglese).
esempio: in 139**00** gli zeri in rosso non sono significativi, ma in 139**00.0** tutti gli zeri (in **verde**) sono significativi

Arrotondamento

Convenzione:

1) La prima cifra significativa si arrotonda all'intero più vicino

Esempi:

0.02385 m/s^2 diventa 0.02 m/s^2

0.02001 g diventa 0.02 g

34 cm diventa 30 cm

2) Se la cifra è equidistante dai due interi si sceglie l'intero pari

Esempi:

0.025 kg diventa 0.02 kg

0.35 s diventa 0.4 s

35 m/s diventa 40 m/s

Sequenza di arrotondamento

0.037462853

0.03746285

0.0374628

0.037463

0.03746

0.0375

0.038

0.04

Confronto tra grandezze e misure 1/2

Supponiamo di avere una lente di lunghezza focale $\boldsymbol{f}$, dichiarata dal costruttore, di 200 mm.
Tre gruppi di sperimentatori operano delle misure sulla lente per verificare il valore di f ottenendo:

<u>Gruppo A</u>:
$$\boldsymbol{f = (210 \pm 20)\ \mathrm{mm}}$$

<u>Gruppo B</u>:
$$\boldsymbol{f = (204 \pm 4)\ \mathrm{mm}}$$

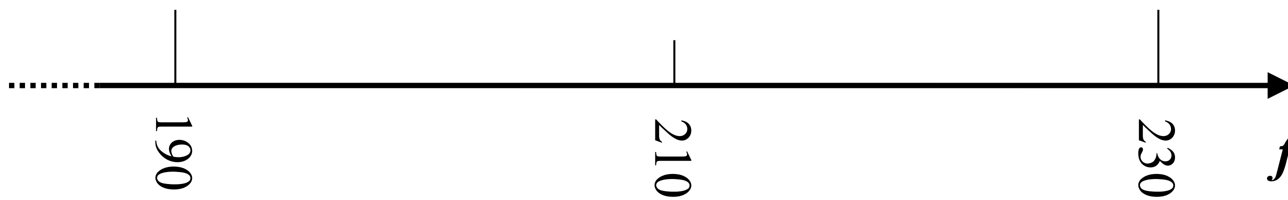
<u>Gruppo C</u>:
$$\boldsymbol{f = (201.6 \pm 0.5)\ \mathrm{mm}}$$

Confronto tra grandezze e misure 2/2

<u>Gruppo A</u>:

f = (210 ± 20) mm

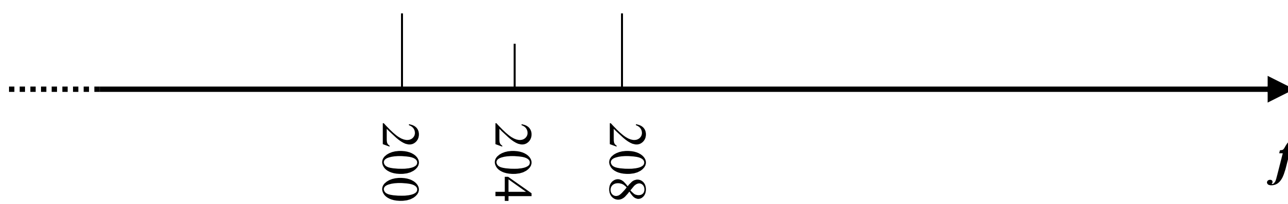
CONSISTENTE



<u>Gruppo B</u>:

f = (204 ± 4) mm

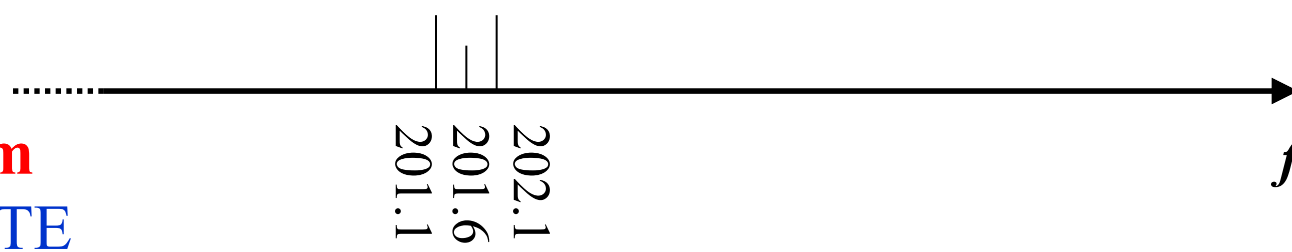
CONSISTENTE



<u>Gruppo C</u>:

f = (201.6 ± 0.5) mm

<u>NON</u> CONSISTENTE



200 valore del costruttore

Errori relativi 1/2

La conoscenza della sola incertezza non dà informazioni complete sulla qualità delle misura.

Supponiamo di avere realizzato delle misure di lunghezza con un errore dx = 1 cm. Questo dato, da solo, non ci permette di capire se abbiamo ottenuto delle “buone” misure.

Ad esempio, potremmo avere i seguenti casi:
$x = (3 \pm 1)$ cm
oppure
$x = (10000 \pm 1)$ cm

E’ evidente che nel secondo caso abbiamo operato in modo molto più raffinato rispetto al primo.

Errori relativi 2/2

Come si esprime, formalmente, il concetto di “qualità” di una misura?
Mediante l’errore relativo, definito come:

$$\text{errore relativo} = \frac{\delta x}{x}$$

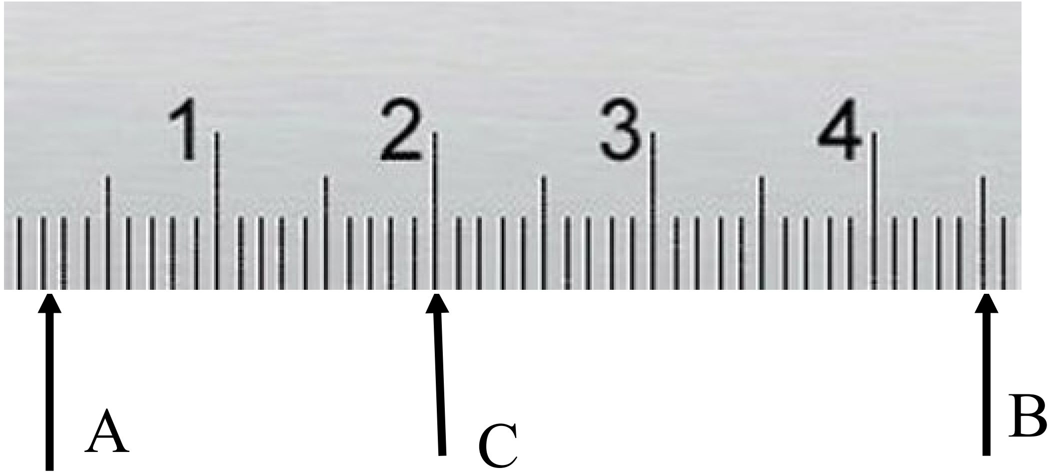
Questa quantità moltiplicata per 100 prende il nome di errore percentuale.

La sola incertezza dx è usualmente chiamata errore assoluto.

<u>Dagli esempi precedenti:</u>
x = (3 ± 1) cm => dx/x = 1/3 = 0.33 cioè il 33%
oppure
x = (10000 ± 1) cm => dx/x = 1/10000 = 0.0001 cioè lo 0.01%

Propagazione degli errori

Voglio determinare la distanza dei punti A e B dal punto C (vedi figura)



A=(2.5±0.5) mm

C=(20.0±0.5) mm

B=(45.0±0.5)mm

A questo punto è richiesto il calcolo dei segmenti ***AC*** ed ***CB***:

$$\overline{\mathbf{AC}} = (\mathbf{20.0 \pm 0.5})\,\mathbf{mm} - (\mathbf{2.5 \pm 0.5})\,\mathbf{mm}$$

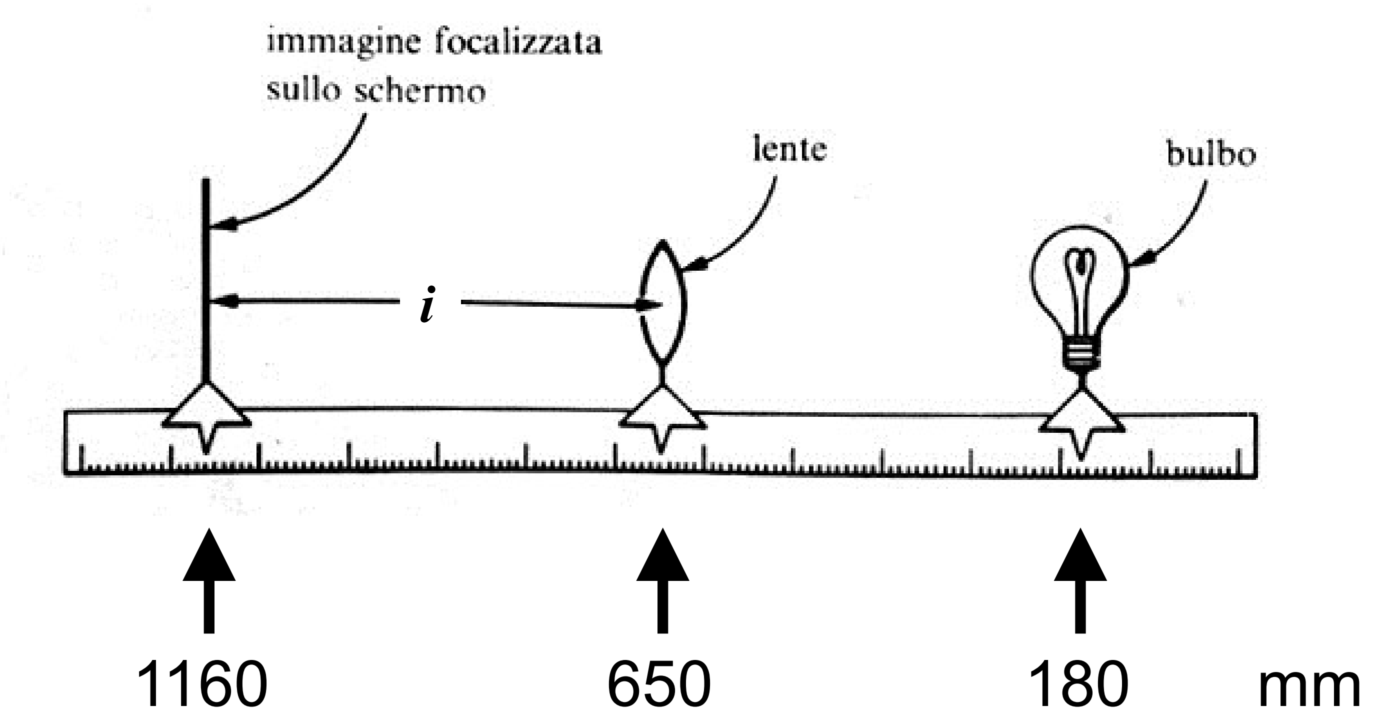
$$\overline{\mathbf{CB}} = (\mathbf{45.0 \pm 0.5})\,\mathbf{mm} - (\mathbf{20.0 \pm 0.5})\,\mathbf{mm}$$

Qual è il risultato della operazione precedente?

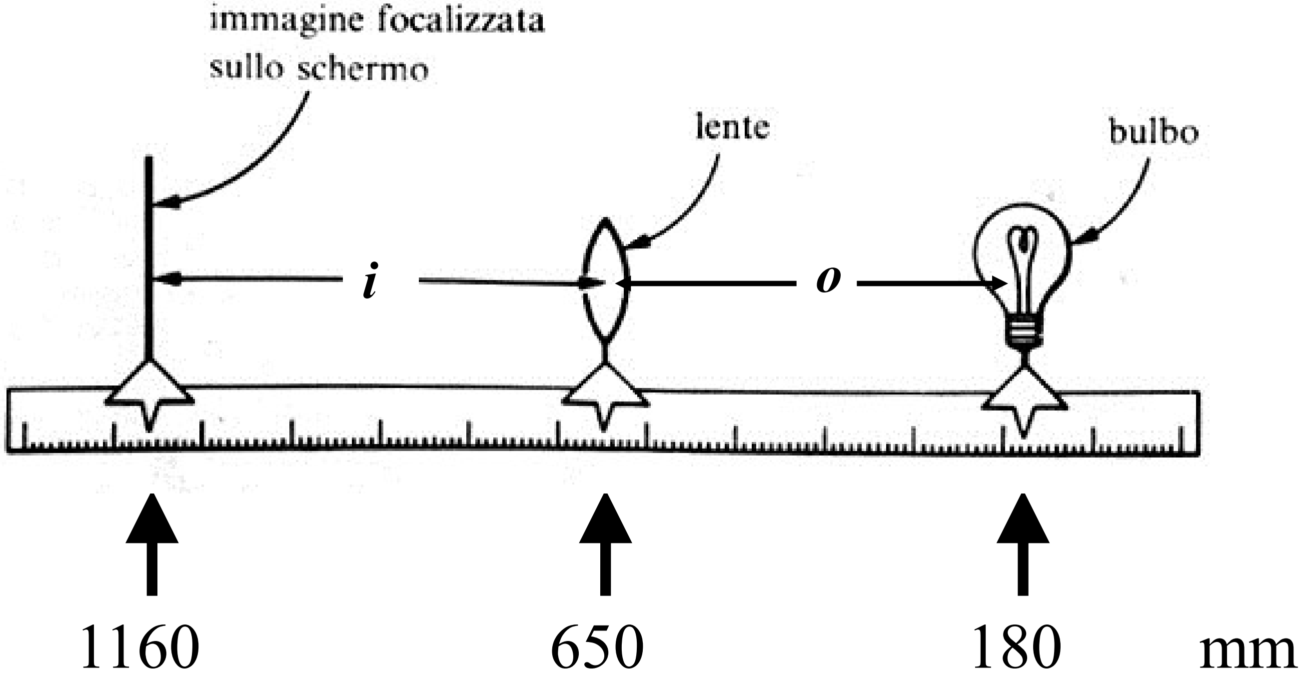
Propagazione degli errori

Riprendiamo il caso della misura della lunghezza focale mediante l'equazione delle lenti sottili; siamo interessati a misurare *i* ed *o* definiti in precedenza.

Usualmente la configurazione sperimentale è del tipo seguente



Somme e differenze 1/3



A questo punto è richiesto il calcolo di ***i*** ed ***o***:

i = (1160.0 ± 0.5 mm) – (650.0 ± 0.5 mm)

o = (650.0 ± 0.5 mm) – (180.0 ± 0.5 mm)

Qual è il risultato della operazione precedente?

Somme e differenze 2/2

Regola: l'errore assoluto della somma o della differenza di due misure è la somma degli errori assoluti.

<u>Dall'esempio precedente:</u>

$i = 1160.0 - 650.0 = 510.0$ mm

$\mathrm{d}i = 0.5 + 0.5 = 1.0$ mm

Il risultato finale è:

$\boldsymbol{i = (510.0 \pm 1.0)}$ **mm**

<u>Dall'esempio precedente:</u>

$o = 650.0 - 180.0 = 470.0$ mm

$\mathrm{d}o = 0.5 + 0.5 = 1.0$ mm

Il risultato finale è:

$\boldsymbol{o = (470.0 \pm 1.0)}$ **mm**

Somme e differenze 3/3

Supponiamo di avere una grandezza q data da:

$$q=x+y+z-u-v-w$$

L'errore δq su q è dato da:

$$\delta q= \delta x+\delta y+\delta z+\delta u+\delta v+\delta w$$

Se le misure sono indipendenti e casuali c'è una sovrastima degli errori: somma in quadratura:

$$\boldsymbol{\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + (\delta v)^2 + (\delta w)^2}}$$

Prodotti e quozienti 1/2

Regola: l’errore relativo del prodotto o del quoziente di due o più misure è la somma degli errori relativi.

Esempio:

Calcolo dell’ingrandimento lineare I (I = y’/y).

Misure: y’ = (2.50 ± 0.05) cm, y = (1.25 ± 0.05) cm

$$\mathbf{I = \frac{y'}{y} = \frac{2.50}{1.25} = 2.00}$$

$$\mathbf{\frac{dI}{I} = \frac{dy'}{y'} + \frac{dy}{y} = \frac{0.05}{2.50} + \frac{0.05}{1.25} = 0.02 + 0.04 = 0.06}$$

$$\mathbf{dI = \frac{dI}{I} \cdot I = 0.06 \cdot 2.00 = 0.12}$$

I = (2.00 ± 0.12)

Prodotti e quozienti 2/2

Supponiamo di avere una grandezza q data da:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x \cdot y \cdot z}}{\mathbf{u \cdot v \cdot w}} \Rightarrow \frac{\delta \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\delta \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\delta \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} + \frac{\delta \mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} + \frac{\delta \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + \frac{\delta \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \frac{\delta \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$

Se le misure sono indipendenti e casuali c’è una sovrastima degli errori: somma in quadratura degli errori relativi:

$$\frac{\delta \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right)^2 + \left(\frac{\delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}}\right)^2 + \dots\dots\dots + \left(\frac{\delta \mathbf{w}}{\mathbf{w}}\right)^2}$$

Esempio: prodotto e quoziente

Sia **q** una grandezza determinata dalla seguente espressione:

$$\mathbf{q} = \lambda \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{u} \cdot \alpha \mathbf{v}}$$

dove λ e α sono delle costanti (prive di errori) mentre **x**, **u** e **v** sono grandezze misurate e quindi con errori.

$$\frac{\delta \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\delta \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\delta \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} + \frac{\delta \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Funzioni di una variabile

Regola: l'errore assoluto della funzione di una misura è il valore assoluto della derivata della funzione rispetto alla variabile misurata calcolata nel valore della misura.

Esempio:

Misurato l'angolo $\theta = (46 \pm 1)°$ è richiesto il sen θ.

$$\theta = 46 \cdot \pi / 180 = 0.802851455 \text{ rad}$$

$$d\theta = (1 / 46) \text{ x } 0.802851455 = 0.017453 \text{ rad} \cong 0.017 \text{ rad}$$

$$\theta = (0.803 \pm 0.017) \text{ rad}$$

$$\text{sen } \theta = \text{sen}(0.803) = 0.71944$$

(errore su sen θ) $\quad \text{dsen } \theta = |\cos \theta| \cdot d\,\theta = \cos(0.803) \text{ x } 0.017 \cong 0.012$

sen $\theta = (0.719 \pm 0.012)$

Funzioni in più variabili

Regola: l'errore assoluto della funzione q(x,y,z) è la somma dei valori assoluti delle derivate della funzione rispetto alla variabile misurata calcolata nel valore della misura.

$$\delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\delta y + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$

Esempio di funzione in più variabili

Supponiamo che per la determinazione della distanza focale di una lente sottile, in corrispondenza del valore di ***o*=(52.0±0.1) cm**, sia stata determinata ***i*=(32.7±1.0) cm**. Nella propagazione degli errori, si ottiene:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{o} \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{o+i}{io} \Rightarrow f=\frac{oi}{o+i}$$

$$\delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial o}\right|\delta o+\left|\frac{\partial f}{\partial i}\right|\delta i \Rightarrow \delta f=\frac{i^2}{(o+i)^2}\delta o+\frac{o^2}{(o+i)^2}\delta i$$

$$f=20.0756$$

$$\delta f=0.386\cdot 0.1+0.614\cdot 1.0=0.65$$

$$f=(20.1\pm 0.6)\,\mathrm{cm}$$

Informazione ottenuta da più misure

Supponiamo ancora di voler stimare la lunghezza focale di una lente con l'equazione delle lenti sottili per mezzo della misura di *i* e *o*.
In uno dei casi precedenti abbiamo visto che un gruppo di sperimentatori aveva ottenuto, mediante una misura di *i* e *o*:

Gruppo A:
$\boldsymbol{f = (210 \pm 20)}$ **mm**

Il Gruppo A ripete la misura più volte, ottenendo più valori di *f*:
$\boldsymbol{f_0 = (210 \pm 20)}$ **mm**
$\boldsymbol{f_1 = (199 \pm 7)}$ **mm**
$\boldsymbol{f_2 = (205 \pm 6)}$ **mm**
$\boldsymbol{f_3 = (194 \pm 10)}$ **mm**

"Combinando" più risultati è possibile ottenere un'informazione più accurata su *f* ?

Poche misure: media e dispersione

Quano le misure sono “poche”, come quelle realizzate dal Gruppo A:

$\boldsymbol{f_0 = (210 \pm 20)}$ **mm,** $\boldsymbol{f_1 = (199 \pm 7)}$ **mm,** $\boldsymbol{f_2 = (205 \pm 6)}$ **mm,** $\boldsymbol{f_3 = (194 \pm 10)}$ **mm**

la media dei valori costituisce la miglior stima:

$f_{\mathrm{medio}} = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3)\ /\ 4 = 202\ \mathrm{mm}$

la semi-dispersione è un buon metodo per valutare l’errore. Si ottiene individuando la misura più “distante” dalla media, nel nostro caso f_0:

$\mathrm{d}f_{\mathrm{medio}} = |f_{\mathrm{medio}} - f_0|\ /\ 2 = 4\ \mathrm{mm}$

Concludendo si ottiene:

$\boldsymbol{f_{\mathrm{medio}} = (202 \pm 4)}$ **mm**

Molte misure: media e deviazione standard

Quano le misure sono "molte" *, $x_1, \ldots, x_N$,
la media dei valori costituisce ancora la miglior stima, l'errore associato alla singola misura è quantificato dalla deviazione standard della distribuzione delle misure σ_x, mentre l'errore sulla media è la deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}}$; rispettivamente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

* nella pratica, il senso di "poche" e "molte" misure è quantificabile dalla sensibilità e dalla ragionevolezza dello sperimentatore

Media pesata

Supponiamo di avere N misure separate e indipendenti di una stessa grandezza x:

$$(x_i \pm \delta x_i) \text{ per } i=1, 2, \ldots., N$$

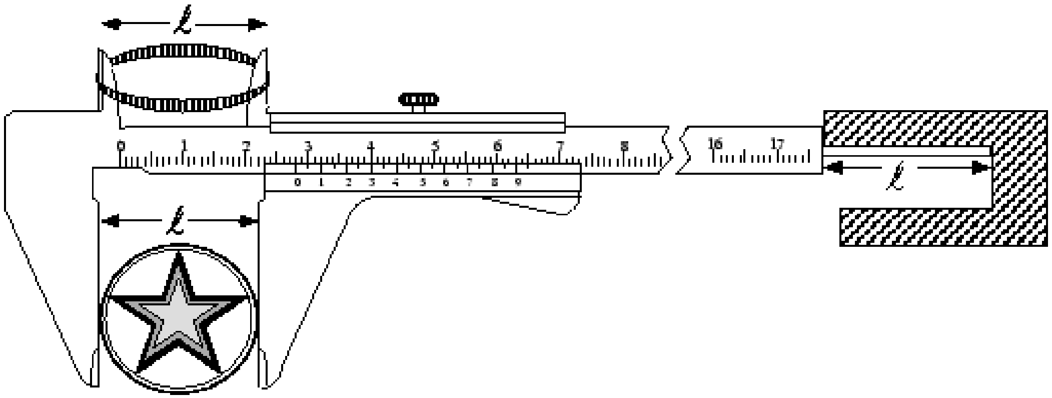
Si introducono i fattori peso w_i definiti come segue:

$$w_i = \frac{1}{(\delta x_i)^2}$$

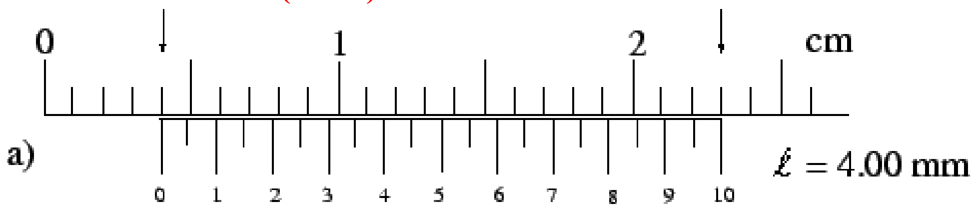
Si definisce media pesata la seguente quantità:

$$x_{best} = \frac{\sum_1^N w_i x_i}{\sum_1^N w_i}, \quad \sigma_{xbest} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^N w_i}}$$

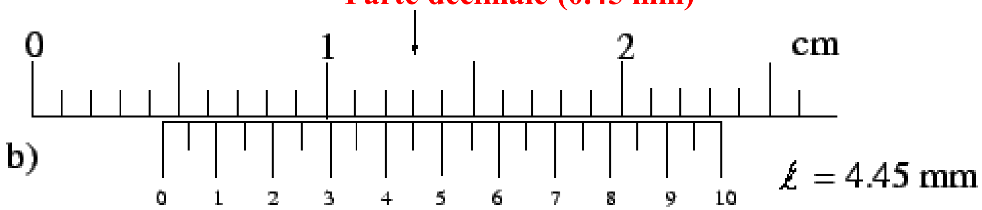
Strumenti di misura di lunghezze: il Calibro ventesimale



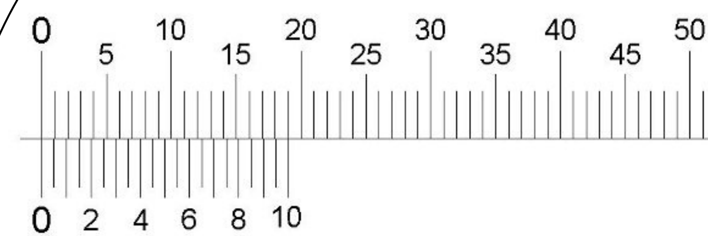
Parte intera (4 mm)



Parte decimale (0.45 mm)



Nonio ventesimale



Indeterminazione

$$\frac{1}{20}\,\text{mm} = 0.05\,\text{mm}$$

(4.45±0.05) mm