

# **ELEMENTI DI MECCANICA**

## **3 Meccanica del corpo rigido**

Giovanni Buccolieri

Università del Salento, Dipartimento Matematica e Fisica

e-mail: [giovanni.buccolieri@unisalento.it](mailto:giovanni.buccolieri@unisalento.it)

# Sistemi di punti

Finora abbiamo considerato sistemi formati da un solo punto materiale.

Ora considereremo sistemi formati da più punti materiali.

Accanto alle forze che si esercitano tra il sistema e l'ambiente, dette **forze esterne** (rispetto al sistema) abbiamo ora forze che si esercitano tra punti appartenenti al sistema, dette pertanto **forze interne**.

# Forze interne ed esterne

Per ogni punto  $i$  del sistema diciamo  $F_i$  la forza totale agente sul punto.

Questa può essere pensata come somma di due termini, uno dovuto alle forze interne al sistema  $F^I$  e uno dovuto a quelle esterne  $F^E$ :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E$$

Sia le forze interne che esterne possono essere conservative o dissipative.

# Risultante delle forze interne

Abbiamo un primo importante teorema: la risultante di tutte le forze interne di un sistema è nulla:

$$\sum_i \vec{F}_i^I = 0$$

Questo è conseguenza del 3° principio della dinamica: ad una forza agente sul punto  $i$  e dovuta al punto  $j$ , corrisponde la forza coniugata uguale e opposta alla precedente.

La risultante della coppia è zero e quindi la somma delle risultanti è pure zero:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, \dots, n} \vec{F}_i^I &= \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}^I = \sum_{j \neq 1} \vec{f}_{1j}^I + \sum_{j \neq 2} \vec{f}_{2j}^I + \dots + \sum_{j \neq n} \vec{f}_{nj}^I = \\ &= \left( \vec{f}_{12}^I + \vec{f}_{13}^I + \dots + \vec{f}_{1n}^I \right) + \left( \vec{f}_{21}^I + \vec{f}_{23}^I + \dots + \vec{f}_{2n}^I \right) + \dots + \left( \vec{f}_{n1}^I + \vec{f}_{n2}^I + \dots + \vec{f}_{n(n-1)}^I \right) \end{aligned}$$

# Grandezze meccaniche del sistema

Per ogni punto  $P_i$  del sistema possiamo definire le grandezze meccaniche: quantità di moto, momento angolare, energia cinetica.

Possiamo ora definire le corrispondenti grandezza meccaniche del sistema come somma delle grandezze dei punti componenti:

$$\text{Massa: } \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{m}_i$$

$$\text{Quantità di moto: } \vec{\mathbf{P}} = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\text{Momento angolare: } \vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\text{Energia cinetica: } \mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i = \sum_i \frac{1}{2} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i^2$$

# Centro di massa

Il centro di massa è un punto ideale dello spazio  
la cui posizione è definita da:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Attenzione che questa è un'uguaglianza vettoriale.

Ciò significa che le coordinate del CM (p.e. in un sistema cartesiano) sono:

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

.... punto in cui suppongo concentrata la massa del sistema o del corpo (può essere esterno al corpo)

# Velocità del CM

Calcoliamo la velocità del CM:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

Ne deriva l'importante teorema: la quantità di moto di un sistema è uguale alla quantità di moto del CM, considerato come un punto materiale di massa  $M$  e velocità  $v_{\text{CM}}$ .

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}$$

# Accelerazione del CM

Calcoliamo l'accelerazione del CM:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Ricordiamo la 2<sup>a</sup> legge della dinamica per il punto generico  $i$ :

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{I}} + \vec{F}_i^{\text{E}}$$

e introduciamola nell'equazione precedente.



# Moto del CM

Troviamo: 
$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \sum_i \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i (\vec{\mathbf{F}}_i^{\text{I}} + \vec{\mathbf{F}}_i^{\text{E}}) = \vec{\mathbf{F}}^{\text{I}} + \vec{\mathbf{F}}^{\text{E}} = \vec{\mathbf{F}}^{\text{E}}$$

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{F}}^{\text{E}}$$

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la risultante delle forze interne è nulla.

D'altra parte

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \sum_i \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathbf{m}_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{p}}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}$$

# Prima equazione della dinamica dei sistemi

Abbiamo ottenuto l'importante teorema:

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}^{\text{E}}$$

Il CM si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Prima equazione della dinamica dei sistemi o prima equazione cardinale della dinamica.

# Proprietà del CM

Come risulta dalle definizioni di posizione, velocità e accelerazione del CM, questo punto ci fornisce informazioni sulle proprietà medie del sistema ma nulla ci dice sul moto dei singoli punti.

# Distribuzione continua di massa

Come sappiamo la materia è suddivisibile in unità discrete, gli atomi e le molecole.

Nel volume occupato da un corpo macroscopico, c'è un numero estremamente grande di tali costituenti elementari.

Si può allora ritenere con buona approssimazione che entro questi corpi la massa sia distribuita con continuità.

Questa assunzione permette di applicare i metodi del calcolo differenziale e integrale.

Introduciamo a tale scopo una nuova grandezza.

# Densità di massa

- Massa distribuita in un volume
  - Densità volumetrica di massa
- Massa distribuita su di una superficie
  - Densità superficiale di massa
- Massa distribuita lungo una linea
  - Densità lineare di massa
- Dimensioni della densità

omogenea

$$\delta = \frac{M}{V}$$

$$\sigma = \frac{M}{A}$$

$$\lambda = \frac{M}{l}$$

generale

$$\delta = \frac{dM}{dV}$$

$$\sigma = \frac{dM}{dA}$$

$$\lambda = \frac{dM}{dl}$$

$$[\delta] = \text{ML}^{-3}$$

$$[\sigma] = \text{ML}^{-2}$$

$$[\lambda] = \text{ML}^{-1}$$

# Distribuzione continua di massa

Viceversa si può trovare la massa:

in un volume  $V$        $M = \iiint_V \delta dV$

su di una superficie  $S$        $M = \iint_S \sigma dA$

lungo una linea  $L$        $M = \int_L \lambda dl$

# Centro di massa in un corpo continuo

facoltativo

Riprendiamo la definizione di CM: 
$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Per un corpo con distribuzione continua di materia basterà sostituire le sommatorie con integrali e le masse elementari con masse infinitesime:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\int_{\text{corpo}} \vec{r} dm}{\int_{\text{corpo}} dm} = \frac{1}{M} \int_{\text{corpo}} \vec{r} dm$$

# Centro di massa in un corpo continuo facoltativo

Ove abbiamo indicato con  $M$  la massa totale del corpo:  $\mathbf{M} = \int_{\text{corpo}} d\mathbf{m}$

Le masse infinitesime sono contenute in volumi infinitesimi.

Se la densità è uniforme, gli integrali si riducono a integrali puramente geometrici:

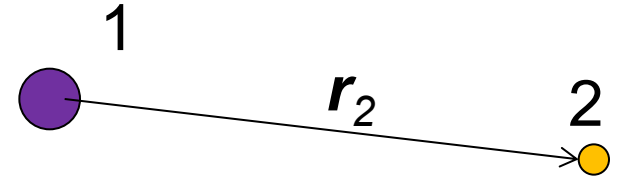
$$d\mathbf{m} = \delta d\mathbf{V}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{\int_{\text{corpo}} \vec{\mathbf{r}} d\mathbf{m}}{\int_{\text{corpo}} d\mathbf{m}} = \frac{\int_{\text{corpo}} \vec{\mathbf{r}} \delta d\mathbf{V}}{\int_{\text{corpo}} \delta d\mathbf{V}} = \frac{\delta \int_{\text{corpo}} \vec{\mathbf{r}} d\mathbf{V}}{\delta \int_{\text{corpo}} d\mathbf{V}} = \frac{\int_{\text{corpo}} \vec{\mathbf{r}} d\mathbf{V}}{\int_{\text{corpo}} d\mathbf{V}} = \frac{1}{V} \int_{\text{corpo}} \vec{\mathbf{r}} d\mathbf{V}$$



# Centro di massa di due corpi puntiformi

Siano  $M$  e  $m$  le masse.



Prendiamo come origine la posizione di uno dei due corpi (l'1 p.e.)  
allora  $r_1=0$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M+m} = \frac{m}{M+m} \vec{r}_2$$

Quindi il CM giace sulla congiungente dei due punti e la sua distanza da essi è inversamente proporzionale alle loro masse.

Notiamo che  $r_{\text{CM}}$  è lungo la congiungente ed è minore di  $r_2$ .

# Corpi con alta simmetria

Se un corpo è simmetrico rispetto ad un punto, un asse o un piano, il CM giace nel punto, sull'asse o sul piano, rispettivamente.

Se esistono più assi o piani di simmetria, il CM si trova nella loro intersezione.

# Conservazione della quantità di moto

Se il sistema è isolato, o le forze esterne hanno risultante nulla, e quindi  $\vec{\mathbf{F}}^E = \mathbf{0}$ , la QM si conserva:

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \vec{\mathbf{P}} = \text{const.}$$

In tal caso il CM si muove di moto rettilineo uniforme:  $\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\mathbf{M}}$

Attenzione: la QM dei singoli punti può cambiare nel tempo, è la loro somma che rimane costante.

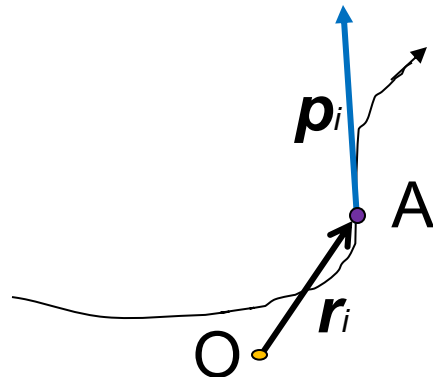
# Momento angolare

Supponiamo di essere in un sistema inerziale.

Il momento angolare totale di un sistema di punti  $\{A_i\}$  rispetto al polo fisso  $O$  è:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Il momento dipende dal polo scelto, a meno che la quantità di moto non sia nulla.



# Momento delle forze

Il momento risultante di tutte le forze agenti sul sistema di punti  $\{A_i\}$  rispetto al polo fisso  $O$  è:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Il momento delle forze dipende dal polo a meno che  $F$  (la risultante delle forze) non sia nulla.

# Coppia di forze

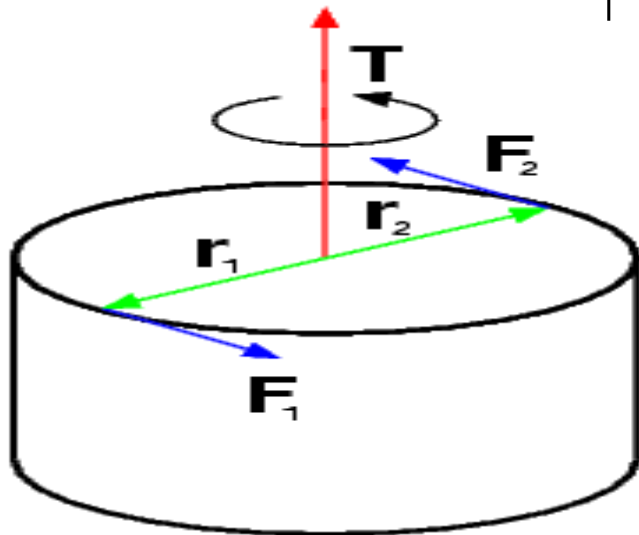
Due forze  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_2$ , parallele, versi opposti e stesso modulo:

$$|\vec{\mathbf{F}}_1| = |\vec{\mathbf{F}}_2| = \mathbf{F} \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$$

Quindi è rispettata la condizione di equilibrio traslazionale.

Si dimostra che il momento della coppia è dato da:

$$|\vec{\mathbf{M}}(\text{coppia})| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = |\vec{\mathbf{r}}_1| + |\vec{\mathbf{r}}_2|$$



L'applicazione di una coppia di forze fa ruotare il corpo.

# Momento delle forze

Approfondiamo l'argomento considerando il momento delle forze interne e il momento delle forze esterne, per un polo generico, fisso o in moto:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{\tau}_O^I + \vec{\tau}_O^E$$

Si dimostra un importante risultato valido per il momento delle forze interne:

**il momento totale delle forze interne risulta nullo.**

$$\vec{\tau}_O^I = 0$$

# Centro di massa e peso

Consideriamo un corpo sottoposto alla forza peso: la risultante di tutte le forze peso agenti su ciascun elemento del corpo è:

$$\vec{P} = \int_{\text{corpo}} \vec{g} dm = M\vec{g}$$

Il centro delle forze peso è detto centro di gravità o **BARICENTRO** e coincide con il CM (se posso considerare  $g$  costante su tutto il corpo):

$$\vec{r}_{\text{CG}} = \frac{\sum_i \vec{r}_i P_i}{\sum_i P_i} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i g}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{\text{CM}}$$

La forza risultante (il peso) è applicata a tale punto.



# Teorema del momento angolare

Abbiamo visto nel caso di un solo punto materiale, che, se il polo è fisso e il sistema di riferimento è inerziale, il teorema del momento angolare è:  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$

Generalizziamo questo teorema al caso di un sistema di più particelle e polo fisso.

Deriviamo rispetto al tempo otteniamo:  $\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \\ &= \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \mathbf{0} + \vec{\tau}_O \end{aligned}$$

Cioè di nuovo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

# Teorema del momento angolare

Si può dimostrare il notevole teorema: la derivata del momento angolare è uguale al momento delle forze (esterne) se come polo usiamo:

- un punto fisso in un sistema inerziale;
- oppure il CM del sistema (indipendentemente dal fatto che questo sia fisso o sia mobile e qualunque sia il suo moto).

$$\frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{CM}}$$

# Seconda equazione della dinamica dei sistemi

Se il polo è fisso o è il CM, si ha:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q^E$$

Questa è la seconda equazione della dinamica dei sistemi o seconda equazione cardinale della meccanica.

# Lavoro

Calcoliamo il lavoro relativo allo spostamento di un sistema di punti materiali.

Per una particella il lavoro infinitesimo è:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^I \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i = dW_i^I + dW_i^E$$

Il lavoro finito si trova integrando il lavoro infinitesimo tra stato iniziale e finale (che possono essere diversi per ogni particella):

$$W_i = \int_{A_i}^{B_i} dW_i = \int_{A_i}^{B_i} dW_i^I + \int_{A_i}^{B_i} dW_i^E = W_i^I + W_i^E$$

# Lavoro

Per il sistema il lavoro si trova sommando su tutte le particelle:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i W_i^I + \sum_i W_i^E = W^I + W^E$$

A differenza del caso della risultante dei momenti di forza agenti sul sistema, ora **le forze interne danno un contributo non nullo**.

Se considero un **corpo rigido** (non cambiano le distanze mutue tra le particelle che formano il corpo) si scopre che  **$W^I=0$**  e quindi:

$$W = W^E$$

# Energia cinetica

Studiando il lavoro infinitesimo relativo a una particella singola, avevamo trovato l'equazione:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i v_i dv_i = d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dK_i$$

Integrando tra stato iniziale e finale si ottiene:

$$W_i = \int_{A_i}^{B_i} dW_i = \int_{A_i}^{B_i} dK_i = K_i(B_i) - K_i(A_i) = \Delta K_i$$

e sommando su tutte le particelle:

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \Delta K_i = \Delta \sum_i K_i = \Delta K$$

# Energia cinetica

Ovvero: il lavoro complessivo delle forze che agiscono su un sistema è uguale alla variazione di energia cinetica del sistema tra stato iniziale e finale.

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

Teorema dell'energia cinetica per corpo esteso

Inoltre il lavoro è scomponibile nel lavoro delle forze esterne e interne, in generale entrambi diversi da zero:

$$W = W^I + W^E$$

# Energia potenziale

Se le forze sono tutte conservative, il lavoro è esprimibile in termini di energia potenziale

$$dU_i = -dW_i$$

Integrando tra stato iniziale e finale:  $\Delta U_i = -W_i$

Sommando su tutte le particelle:  $\sum_i \Delta U_i = -\sum_i W_i = -W$

Definendo l'energia potenziale totale:  $\Delta U \equiv \sum_i \Delta U_i$

Troviamo:  $\Delta U = -W$



# Conservazione dell'energia meccanica

Il discorso si può ripetere separatamente per forze interne e esterne:

$$W^I = -\Delta U^I \qquad W^E = -\Delta U^E$$

Ricordando il teorema dell'energia cinetica, otteniamo:

$$W = W^I + W^E = -\Delta U^I - \Delta U^E = -\Delta U$$

Abbiamo così ritrovato il teorema di conservazione dell'energia meccanica  $E$  per un corpo esteso:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \Delta(K + U) \equiv \Delta E = 0$$

# Forze non conservative

Se sono presenti forze non conservative, possiamo estendere il ragionamento fatto per una singola particella:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{nc}} + \mathbf{W}_{\text{c}} \quad \mathbf{W} = \Delta\mathbf{K} \quad \mathbf{W}_{\text{c}} = -\Delta\mathbf{U}$$

Ottenendo:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{nc}} + \mathbf{W}_{\text{c}} = \mathbf{W}_{\text{nc}} - \Delta\mathbf{U}$$

Cioè la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro delle forze non conservative:

$$\Delta(\mathbf{K} + \mathbf{U}) = \Delta\mathbf{E} = \mathbf{W}_{\text{nc}}$$

# Corpo rigido

È un caso particolare dei sistemi di punti materiali.

È di grande importanza per le applicazioni pratiche.

Un corpo è detto rigido se le distanze tra tutte le possibili coppie di punti del corpo non cambiano.

Questa è un'astrazione che si applica tanto meglio quanto più i corpi sono indeformabili. Un corpo perfettamente rigido non esiste.

# Moto del corpo rigido

Lo studio del moto di un corpo rigido viene fatto normalmente:

- In un sistema di riferimento inerziale;
- Oppure nel sistema del centro di massa (sistema non inerziale ma con gli assi sempre paralleli a quelli di un sistema di riferimento inerziale);
- Oppure in un sistema con gli assi solidali al corpo rigido (sistema non inerziale, con assi che possono anche ruotare rispetto a quelli di un sistema di riferimento inerziale).

# Moto del corpo rigido

- È determinato da una o più forze esterne, generalmente applicate in punti diversi del corpo;
- Le forze sono quindi caratterizzati da una forza risultante  $F$  e da un momento risultante  $\tau$ ;
- Ricordiamo che il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo quindi la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne.

# Moto del corpo rigido

Le leggi fondamentali sono le equazioni cardinali della meccanica:

$$\vec{F} = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si può anche usare la conservazione dell'energia meccanica nel caso in cui le forze in gioco siano conservative o si abbia attrito statico.

$$\Delta E = 0$$

$$\Delta E = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = 0$$

# Equilibrio statico del corpo rigido

Un corpo rigido è in equilibrio statico se e solo se valgono le due condizioni:

- è inizialmente in quiete  $\vec{P} = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{L} = \vec{0}$

- $P$  e  $L$  non variano nel tempo  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \wedge \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

Dalle ultime equazioni segue:

che la forza risultante è nulla  $\vec{F} = \vec{0}$

che il momento di forza risultante è nullo  $\vec{\tau} = \vec{0}$

Inoltre  $\vec{F} = \vec{0}$  implica che  $\tau$  è indipendente dal polo scelto e quindi il polo può essere un punto qualunque.

# Traslazione di un corpo rigido

Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in genere curvilinee, con la stessa velocità (che in genere varia).

Ogni punto ha lo stesso moto del centro di massa: quindi la conoscenza del moto del centro di massa basta per conoscere il moto di tutti i punti del corpo.

Gli assi del sistema solidale col corpo rimangono sempre paralleli a quelli del sistema del centro di massa.



# Traslazione di un corpo rigido

La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al CM.

Momento angolare ed energia cinetica nel sistema del centro di massa sono nulle:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{0} \quad \vec{\mathbf{L}}^* = \mathbf{0}$$

Quantità di moto ed energia cinetica del corpo sono:

$$\vec{\mathbf{P}} = M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} M\mathbf{v}_{\text{CM}}^2$$

L'equazione del moto del centro di massa è:

$$\vec{\mathbf{F}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$$

# Rotazione di un corpo rigido

- Ogni punto descrive un moto circolare;
- la traiettoria è un arco di circonferenza, di raggio diverso per ogni punto considerato, ma con centro su una stessa retta, detta asse di rotazione.

La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano la stessa velocità angolare in un dato istante, parallela all'asse di rotazione e ovviamente velocità che dipende dalla distanza dall'asse di rotazione.

# Moto di un corpo rigido

Traslazione e rotazione sono i moti più importanti, in quanto vale il teorema, di cui non diamo la dimostrazione:

Il moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime con velocità  $\mathbf{v}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  variabili nel tempo.

# Moto di un corpo rigido

Per descrivere una rototraslazione si utilizzano le equazioni cardinali:

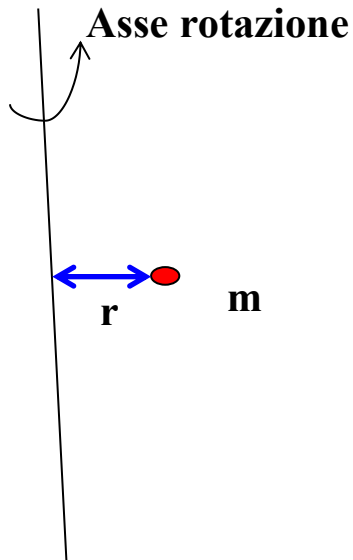
- il teorema del moto del CM;
- il teorema del momento angolare.

In una rototraslazione le velocità  $\mathbf{v}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  sono, in generale, indipendenti.

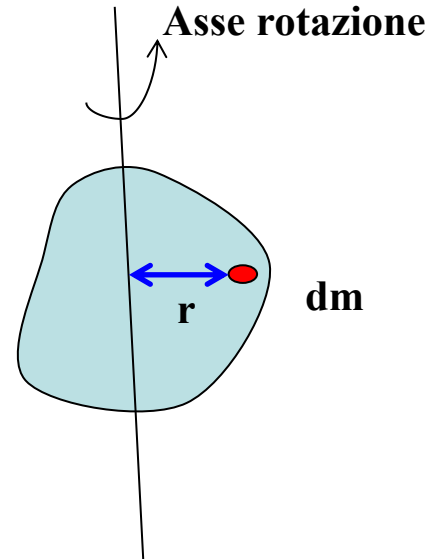
In situazioni in cui è presente un vincolo le due velocità possono essere legate da una relazione che elimina tale indipendenza (rotolamento puro).

# Momento d'inerzia

Per definire il momento d'inerzia di un corpo, bisogna conoscerne la distribuzione di massa, cioè la distanza degli elementi di massa dall'asse attorno a cui ruota.



$$I = mr^2$$



$$I = \int_{\text{corpo}} r^2 dm = \int_{\text{corpo}} r^2 \rho dV$$

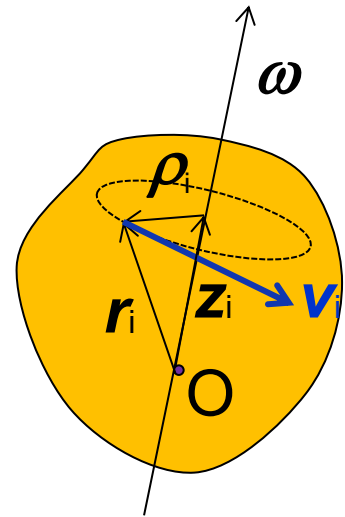
# Momento angolare

Calcoliamo il momento angolare di un corpo esteso in rotazione attorno ad un asse (**supposto di simmetria e fisso**), con velocità angolare  $\omega$ , rispetto al polo  $O$  scelto sull'asse:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Si scopre che  $L$  è proporzionale al vettore velocità angolare  $\omega$  e la costante di proporzionalità è detta momento d'inerzia  $I$  del corpo rispetto all'asse di rotazione scelto.

$L$  è indipendente dalla posizione del polo  $O$  sull'asse.



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

# Momento d'inerzia

- Cambiando l'asse di rotazione, cambia il momento d'inerzia.
- Questa nuova grandezza è stata introdotta per semplificare lo studio del moto dei corpi rigidi.
- Le sue dimensioni fisiche sono:  $[\mathbf{I}] = \mathbf{ML}^2$
- L'unità di misura è:  $u(\mathbf{I}) = \mathbf{kg} \cdot \mathbf{m}^2$

# Calcolo del momento d'inerzia

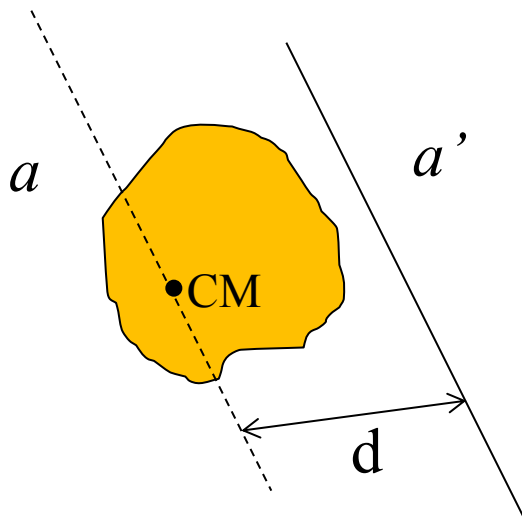
I calcoli più semplici sono quelli per assi di rotazione coincidenti con assi di simmetria passanti per il centro di massa.

Per assi paralleli a questi assi, esiste un teorema che permette di calcolare semplicemente i momenti d'inerzia relativi.

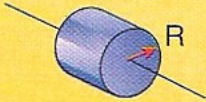

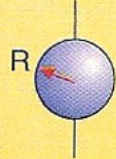


# Teorema di Huygens-Steiner

Detto  $I$  il momento d'inerzia di un corpo di massa  $m$ , rispetto ad un asse  $a$  passante per il CM, il momento d'inerzia rispetto ad un asse  $a'$  parallelo al primo e distante  $d$  da questo è:



$$I' = I + md^2$$

<p>Guscio cilindrico, rispetto all'asse</p> $I = mR^2$ 	<p>Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro</p> $I = \frac{1}{12}mL^2$ 
<p>Cilindro pieno, rispetto all'asse</p> $I = \frac{1}{2}mR^2$ 	<p>Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per una estremità</p> $I = \frac{1}{3}mL^2$ 
<p>Cilindro cavo, rispetto all'asse</p> $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ 	<p>Guscio sferico sottile, rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{3}mR^2$ 
<p>Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro</p> $I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ 	<p>Sfera piena, rispetto a un diametro</p> $I = \frac{2}{5}mR^2$ 
<p>Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro</p> $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$ 	<p>Parallelepipedo rettangolo pieno, rispetto a un asse passante per il centro, perpendicolare a una faccia</p> $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ 

# Energia cinetica di rotazione

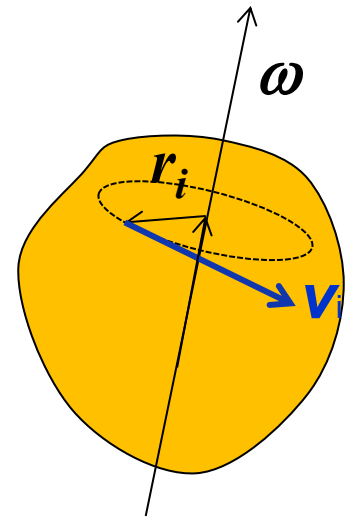
Partendo dalla definizione di energia cinetica,  $K$ :

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ricordando che:  $\vec{L} = I \vec{\omega}$

Possiamo scrivere:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$



L'energia cinetica di rotazione dipende dal momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, ovvero dal momento angolare.

# Lavoro

In seguito all'azione di un momento esterno, la velocità angolare di un corpo viene portata dal valore iniziale  $\omega_1$  a quello finale  $\omega_2$ .

Per il teorema dell'energia cinetica, la variazione di  $K$  è uguale al lavoro delle forze agenti sul sistema.

Per un corpo rigido, solo le forze esterne danno un contributo.

$$\Delta K = W^E$$

# Rotazione intorno ad un asse fisso

È un caso particolare di grande importanza pratica nello studio di macchine e motori.

Il vettore  $\omega$  ha la direzione fissa dell'asse, mentre modulo e verso possono cambiare nel tempo

Se  $\omega$  non è costante, il vettore accelerazione angolare  $\alpha$  è diverso da zero e diretto lungo l'asse:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

# Rotazione con asse fisso e

## $L // \omega$

Il caso più semplice è quello in cui il momento angolare è parallelo all'asse. In tal caso:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

ove  $I$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse.

$L$  può variare in modulo e verso, ma non in direzione, quindi è parallelo a  $\omega$ .

Il teorema del momento angolare impone allora che il momento delle forze  $\tau$  che fa variare  $L$  sia anch'esso parallelo a  $\omega$ .

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

# Rotazione con asse fisso e $L \parallel w$

Risolvendo l'equazione rispetto all'accelerazione:

$$\tau = I\alpha \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau}{I}$$

Noto il momento, si può ricercare l'integrale primo del moto:

$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t \frac{\tau}{I} dt$$

In particolare se il momento è costante, si ha:

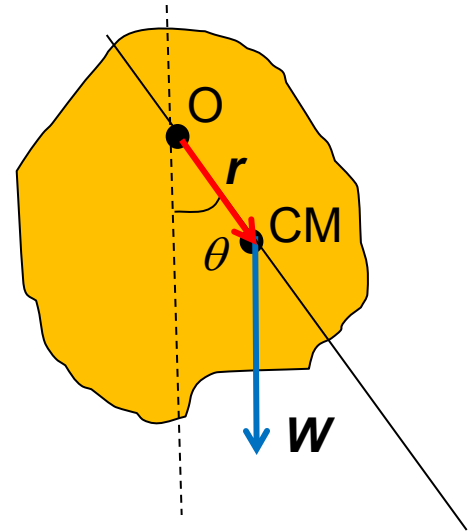
$$\omega(t) - \omega(0) = \frac{\tau}{I} t$$

# Pendolo fisico

È un qualunque corpo rigido oscillante attorno ad un asse orizzontale (non passante per il CM).

Consideriamo la sezione del corpo perpendicolare all'asse e contenente il CM.

Sia  $O$  la traccia dell'asse di rotazione e  $r$  la distanza di  $O$  dal CM,  $W$  il peso del corpo e  $\theta$  l'angolo formato dal da  $r$  con la verticale.



$$\tau = I\alpha, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{W}, \quad \tau = rW\sin\theta$$



# Pendolo fisico

$$\tau = I\alpha, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{W}, \quad \tau = rW\sin\theta$$

$$-rW\sin\theta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

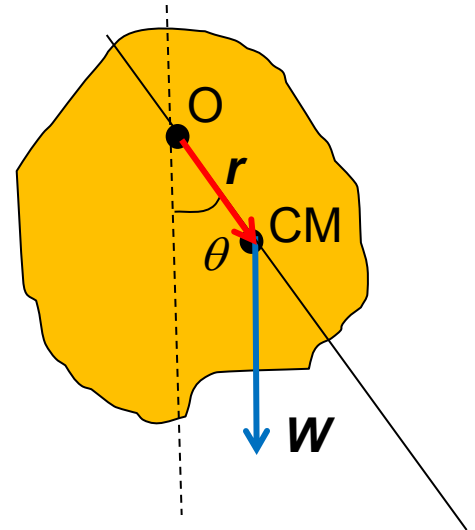
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \sin\theta$$

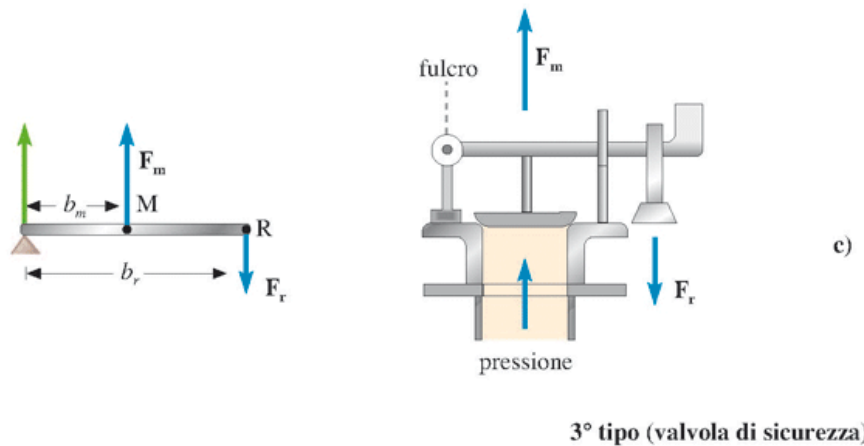
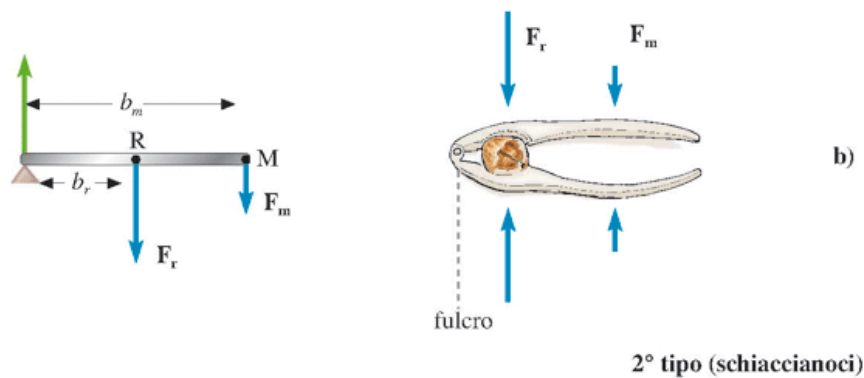
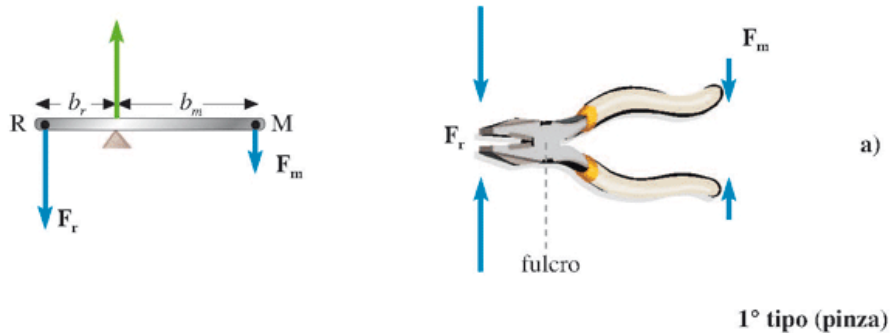
$$\sin\theta \cong \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{rW}{I} \theta = -\Omega^2 \theta$$

$$\theta(t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{rW}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgr}}$$

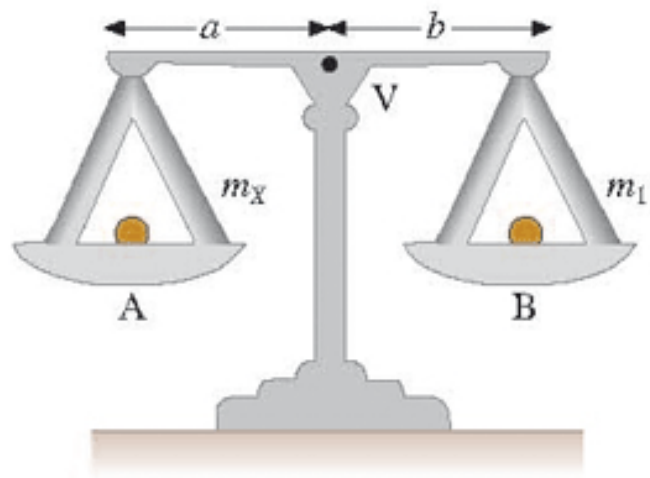




**Figura 3.5**

(a) Leva del 1° tipo: pinza. (b) Leva del 2° tipo: schiaccianoci. (c) Leva del 3° tipo: valvola di sicurezza. Per completezza, in questa Figura, e nelle successive relative alle leve, viene rappresentata la forza di reazione vincolare applicata al fulcro che deve soddisfare l'equilibrio traslazionale del sistema.

3 tipi di leva



**Figura 3.6**

La bilancia:  $V$  è il fulcro dei due bracci di lunghezza  $a$  e  $b$  che sostengono i piattelli A e B su cui porre la massa incognita e la massa equilibratrice (costituita da masse tarate con precisione).

# Elementi di BIOMECCANICA

Applicazioni medico-biologiche dei concetti di meccanica appena visti.

Le articolazione nei sistemi biologici sono costituite da strutture a snodo che ne permettono il movimento. Le forze in gioco sono la **forza peso**, le **reazioni vincolari** e le **forze di trazione muscolare**.

Le equazioni di interesse sono:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \quad \vec{\tau} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

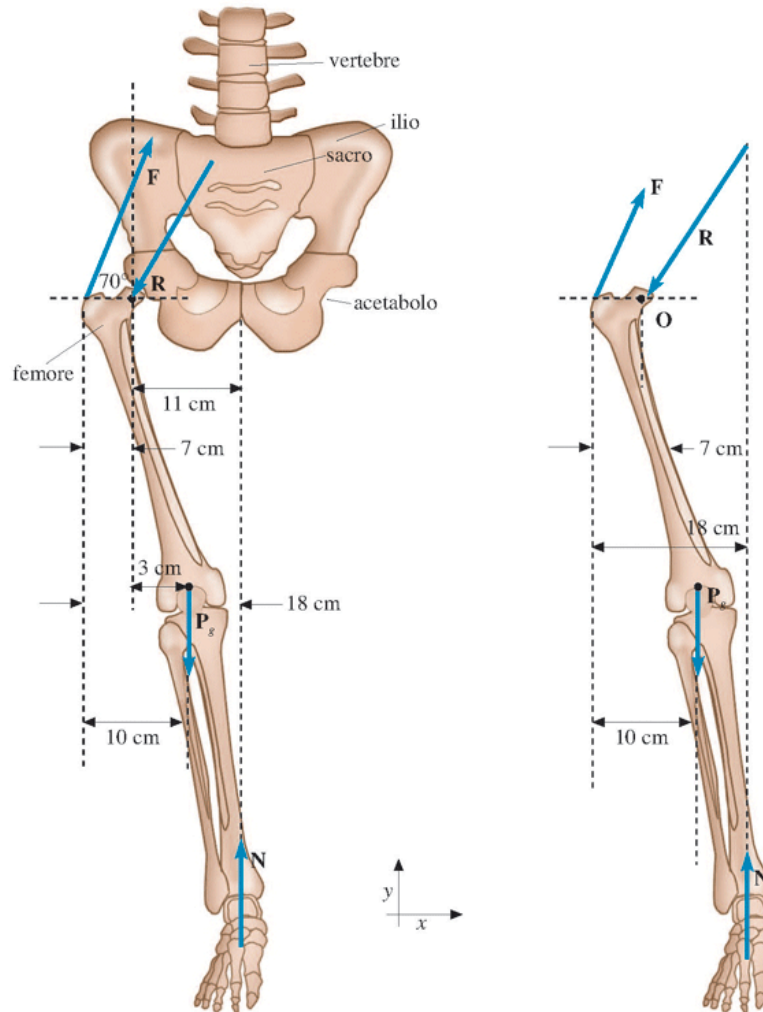
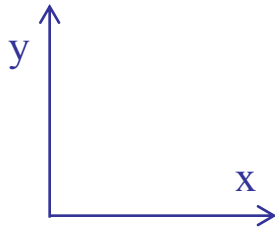
In condizioni di equilibrio:

$$\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \vec{\tau} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum \tau_x = 0 \\ \sum \tau_y = 0 \\ \sum \tau_z = 0 \end{cases}$$

# Gamba in equilibrio

**Figura 3.12**

Rappresentazione schematica dell'anatomia dell'anca e della gamba, con le forze che agiscono per consentire l'equilibrio del corpo su un piede solo. Tutte le forze e il punto O appartengono al piano della pagina. La coordinata  $z$  è ortogonale alla pagina. Le distanze geometriche riportate sono necessarie al calcolo dei momenti.



**F**: forza di trazione dei muscoli abduuttori (glutei) inclinata di  $70^\circ$  rispetto all'orizzontale;

**$P_g$** : forza peso della gamba applicata nel suo baricentro e circa uguale a  $1/7$  del peso complessivo;

**N**: reazione vincolare dovuta al peso;

**R**: forza che agisce sulla testa del femore.

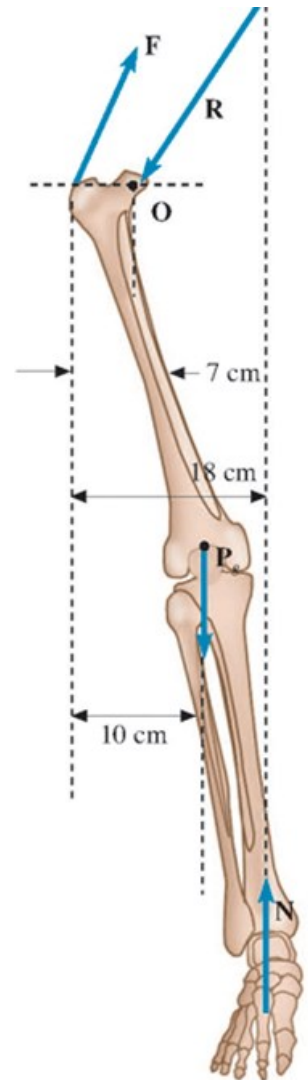
# Equazioni della statica (scelta la testa del femore come polo)

$$\mathbf{F \cos 70^\circ - R_x = 0} \quad \text{Equilibrio traslazionale lungo x}$$

$$\mathbf{F \sin 70^\circ - R_y - \frac{1}{7} P + N = 0} \quad \text{Equilibrio traslazionale lungo y}$$

$$\mathbf{F \sin 70^\circ \cdot 0.07 + \frac{1}{7} P \cdot 0.03 - N \cdot 0.11 = 0} \quad \text{Equilibrio rotazionale rispetto al polo O}$$

Se il corpo è in equilibrio su due piedi allora  $N=P/2$   
mentre se il corpo è in equilibrio su un solo piede  $N=P$



# Equilibrio su un solo piede (N=P)

$F \cos 70^\circ - R_x = 0$  Tre equazioni in tre incognite:  $R_x$ ,  $R_y$  e  $F$ .

$$F \sin 70^\circ - R_y - \frac{1}{7}P + P = 0 \rightarrow F \sin 70^\circ - R_y + \frac{6}{7}P = 0$$

$$F \sin 70^\circ \cdot 0.07 + \frac{1}{7}P \cdot 0.03 - P \cdot 0.11 = 0$$

$$\rightarrow F \sin 70^\circ \cdot 0.07 - P \cdot 0.106 = 0$$

Dall'ultima eq.  $F \cdot 0.0658 = 0.106 \cdot P \rightarrow F = 1.61 \cdot P$

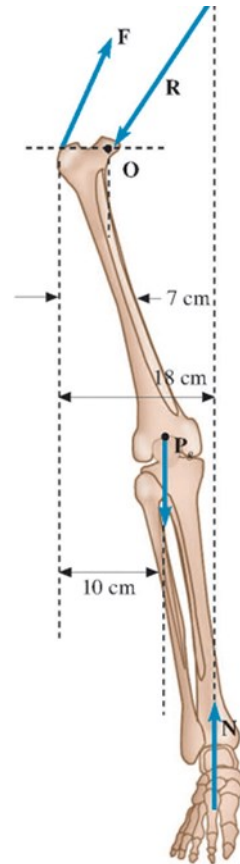
Dalla prima eq.  $R_x = 0.55 \cdot P$

Dalla seconda eq.  $R_y = 2.37 \cdot P$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2.43 \cdot P$$

$$\theta = \arccos \frac{R_x}{R} = 76.9^\circ$$

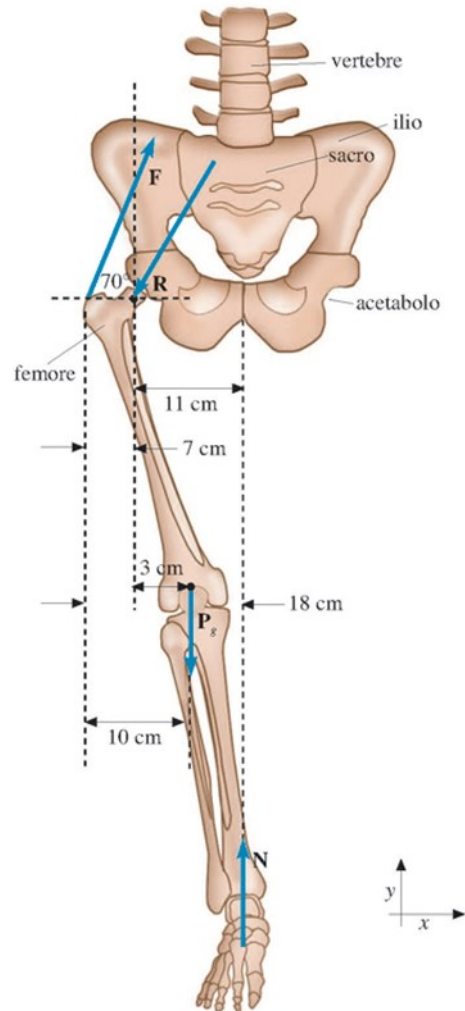
Angolo di  $R$  rispetto all'orizzontale



# Equilibrio su un solo piede ( $N=P$ )

$$F = 1.61 \cdot P$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2.43 \cdot P$$

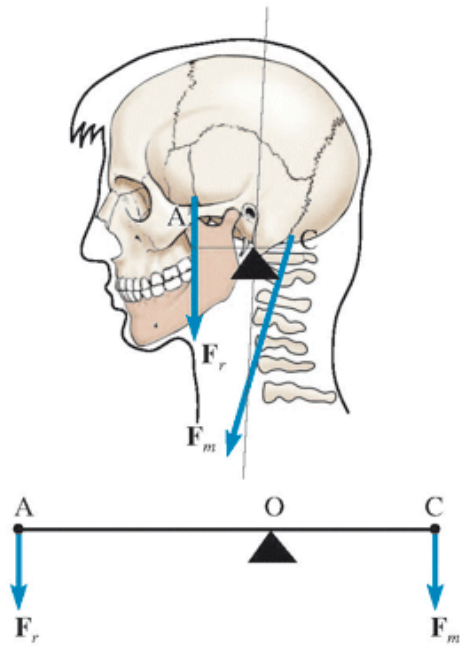


Notiamo che, all'equilibrio, sulla testa del femore, agisce una forza  $R$  pari a circa due volte e mezzo la forza peso.

Si noti anche il relativo elevato valore della forza  $F$  dei muscoli abduttori (più di una volta e mezzo il peso): quando a causa di una frattura, il soggetto è costretto al riposo, i muscoli abduttori si indeboliscono. Ciò comporta, per ottenere un nuovo equilibrio, una maggiore inclinazione di  $R$  e di conseguenza la testa del femore tende a crescere in verticale con conseguente allungamento dell'arto e rotazione del bacino e curvatura della colonna vertebrale (scoliosi).

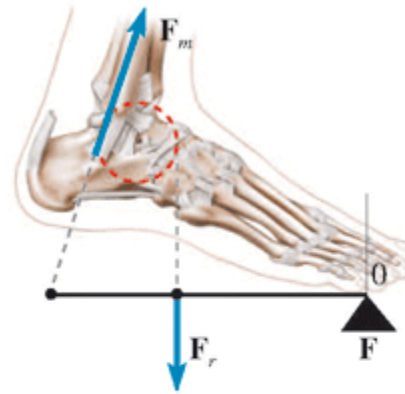


# Leve nel corpo umano



**Figura 3.15**

Leva di primo tipo: articolazione di appoggio della testa.

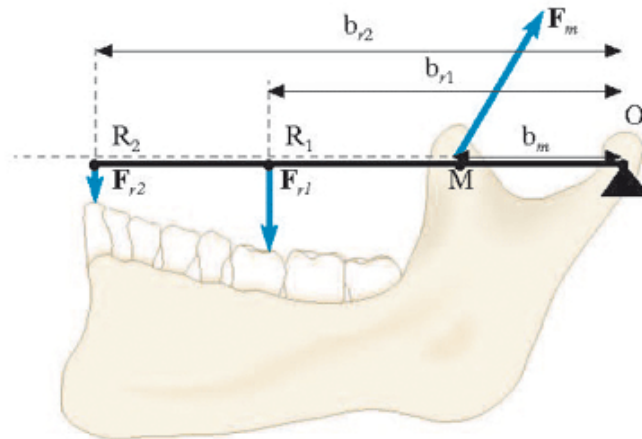


**Figura 3.16**

Leva di secondo tipo: articolazione del piede in elevazione sulle punte.

**Figura 3.19**

La mandibola costituisce una leva di terzo tipo. La forza resistente è maggiore per i molari rispetto a quella degli incisivi e dei canini.



# Leve del corpo umano

**Figura 3.18**

(a) Articolazione del gomito col braccio disteso. (b) Articolazione del gomito col braccio raccolto vicino al tronco. La seconda posizione è più vantaggiosa della prima poiché in questo caso il braccio  $b_m$  è maggiore.

