ELEMENTI DI MECCANICA

2 Meccanica del punto materiale

Giovanni Buccolieri

Università del Salento, Dipartimento Matematica e Fisica

e-mail: giovanni.buccolieri@unisalento.it

Cinematica del punto materiale

E' la parte più elementare della meccanica: studia il moto dei corpi senza riferimento alle sue cause.

Il moto è determinato se è nota la posizione del corpo in funzione del tempo.

Necessita di un sistema di riferimento per determinare la posizione.

- Conoscere il moto significa conoscere ogni coordinata come funzione del tempo, ovvero la sua legge oraria:
  - $x(t), y(t), z(t)$
  - $\rho(t), \phi(t), z(t)$
  - $r(t), \theta(t), \phi(t)$

- Traiettoria: è il luogo dei punti dello spazio occupati dal corpo nei successivi istanti di tempo: fornisce informazioni di tipo geometrico, senza riferimento al tempo.

Cinematica

Nelle pagine seguenti saranno introdotte due grandezze fisiche: la velocità e l'accelerazione.

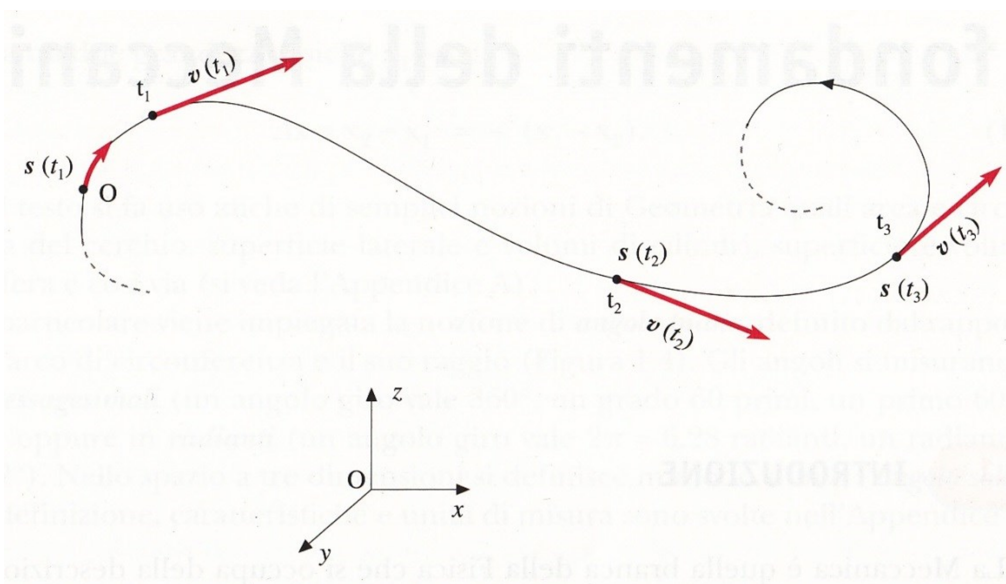
Le leggi del moto non contengono direttamente le posizioni, ma piuttosto le accelerazioni:

$$a_x(t), a_y(t), a_z(t)$$
$$a_\rho(t), a_\varphi(t), ecc.$$

Compito della cinematica è quindi risalire dalle accelerazioni alle posizioni.

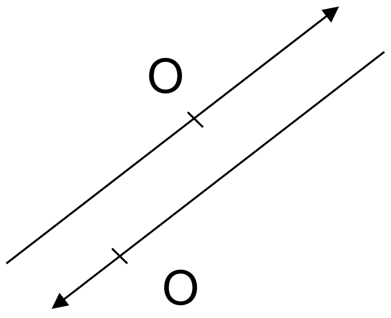
Cinematica

- Le <u>grandezze fisiche</u> necessarie per lo studio della cinematica sono
  - Spazio – *s, l, x, r…*
  - Tempo - *t*
  - Velocità - *v*
  - Accelerezione - *a*



Moto rettilineo

Si svolge lungo una retta su cui si definisce la coordinata *x*, la cui origine (*x*=0) e il cui verso sono arbitrari.



Anche l'origine dei tempi (*t*=0) è arbitraria.

Il moto del corpo è descrivibile con una sola funzione *x(t)*.

La funzione può essere rappresentata sul cosiddetto <u>diagramma orario</u>, sul cui asse delle ascisse poniamo *t* e su quello delle ordinate *x*.

Velocità media

Dato un moto rettilineo, supponiamo che il corpo si trovi nella posizione x_1 al tempo t_1 e nella posizione x_2 al tempo t_2.

Lo <u>spostamento</u> è la differenza delle posizioni: $\Delta x = x_2 - x_1$

L'<u>intervallo di tempo</u> in cui avviene lo spostamento è: $\Delta t = t_2 - t_1$

La <u>velocità media</u> è, per definizione, il rapporto:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Velocità istantanea

Immaginiamo di considerare intervalli di tempo sempre più piccoli, possiamo idealmente pensare al limite in cui l'intervallo tende a zero.

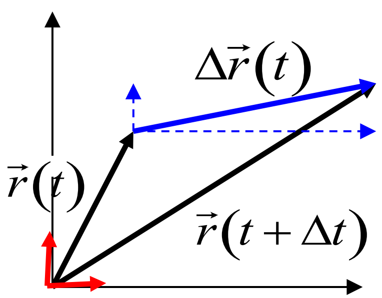
La <u>velocità istantanea</u> è, per definizione, il limite:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{x}'(\mathbf{t})$$

Ovvero la derivata dello spazio rispetto al tempo.

La velocità, in generale, è funzione del tempo: $v=v(t)$

Nel caso in cui sia invece <u>costante</u>, il moto (rettilineo) è detto <u>uniforme</u>



Nello spazio

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{dt}}$$

Relazioni tra posizione e velocità

Abbiamo visto la relazione differenziale tra posizione e velocità:

$$\mathbf{v(t)=\frac{dx}{dt}} \qquad \text{ovvero} \qquad \mathbf{dx = v(t)dt}$$

La relazione inversa è la relazione integrale:

$$\int_{x0}^{x} \mathbf{dx = x - x_0 = \int_{t0}^{t} v(t)dt}$$

Che è utile solo se è nota la dipendenza di v da t, (p.e. nel moto uniforme).

x-x_0 rappresenta lo **spostamento complessivo**, cioè la <u>somma algebrica</u> degli spostamenti e non lo **spazio percorso** che è invece la <u>somma del modulo</u> degli spostamenti.

Relazione tra velocità media e istantanea

Dalla definizione di velocità media e dalla relazione integrale tra posizione e velocità istantanea:

$$\mathbf{v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t0}^{t} v(t)dt}$$

Questa relazione afferma che <u>la velocità media è uguale al valor medio della velocità istantanea.</u>

Moto rettilineo uniforme

Lo spazio è funzione lineare del tempo:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\int_{\mathbf{t}0}^{\mathbf{t}} \mathbf{dt} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)$$

$$\boxed{\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)}$$

La velocità istantanea è uguale alla velocità media:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathbf{m}$$

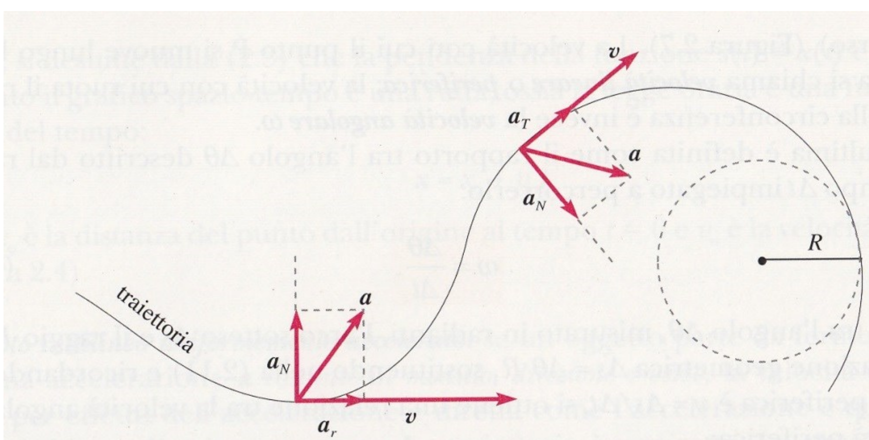
Vettore accelerazione

E' definito come $\qquad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\hat{u}_T(t)]}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\hat{u}_T(t) + v(t)\frac{d\hat{u}_T(t)}{dt} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

Mentre per definire la velocità basta il versore $\boldsymbol{u}_T$, per l'accelerazione servono, in generale, due versori: $\boldsymbol{u}_T$ e $\boldsymbol{u}_N$.



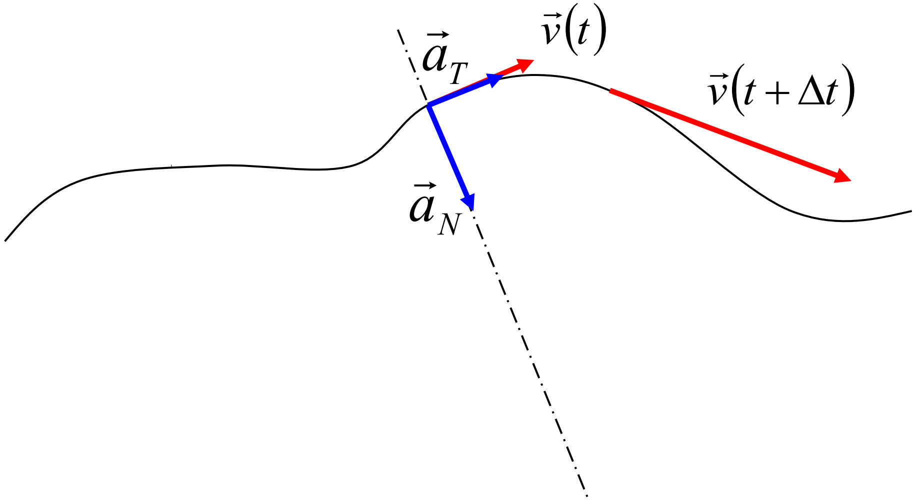
Vettore accelerazione

Il primo va a costituire <u>l'accelerazione tangenziale</u> cioé tangente alla traiettoria: è relativo alla <u>variazione di modulo</u> della velocità.

$$\vec{\mathbf{a}}_T = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} \hat{\mathbf{u}}_T$$

Il secondo è <u>l'accelerazione normale</u>, ossia perpendicolare alla traiettoria e verso la concavità di questa: è relativo alla <u>variazione di direzione</u> della velocità (R è il raggio di curvatura).

$$\vec{\mathbf{a}}_N = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{u}}_N$$



Moto circolare

Sono i moti che avvengono lungo una circonferenza.

Poiché la velocità cambia direzione continuamente, deve essere sempre presente un'accelerazione.

Se la velocità e costante in modulo il moto si dice uniforme.

Si può descrivere il moto o con la coordinata curvilinea s o con la coordinata angolare θ, corrispondente all'angolo al centro sotteso da s.

$$s = R\theta$$

Moto circolare

Similmente a quanto fatto per il moto unidimensionale, si definiscono:

Posizione angolare θ

Spostamento angolare $\Delta\theta$

Velocità angolare media $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Velocità angolare istantanea $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Accelerazione angolare media $\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Accelerazione angolare istantanea $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}$

Moto circolare

In un moto circolare la velocità radiale è sempre nulla, poiché il raggio vettore non cambia in modulo (ma solo in direzione).

$$\mathbf{v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

La velocità coincide quindi con la velocità azimutale:

$$\mathbf{v = v_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt} = R\omega}$$

La velocità è costante se e solo è tale la velocità angolare:

$$\boxed{\mathbf{v(t) = R\,\omega(t)}}$$

Moto circolare uniforme

Il modulo della velocità è costante.

Quindi l'accelerazione tangenziale è nulla.

Rimane l'accelerazione normale (centripeta):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}} = \omega^2 \mathbf{R}$$

Il moto è periodico con periodo *T* pari al tempo di percorrenza della circonferenza:

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi \mathbf{R}}{\mathbf{v}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Moto circolare non uniforme

Cioè il modulo della velocità non è costante.

In questo caso c'è accelerazione tangenziale.

Inoltre l'accelerazione centripeta non è costante:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Inoltre dalla relazione tra velocità e velocità angolare segue che quest'ultima non è costante e quindi esiste un'accelerazione angolare:

$$v = \omega R$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}a_T$$

Accelerazione

Quando il vettore velocità varia nel tempo il moto è detto <u>accelerato.</u>

Similmente a quanto fatto per la velocità, definiamo come accelerazione media il rapporto:

$$\mathbf{a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

E come accelerazione istantanea il limite:

$$\mathbf{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)}$$

Ovvero la derivata della velocità rispetto al tempo.

Accelerazione

L’accelerazione, in generale, è funzione del tempo:

$$a=a(t)$$

Nel caso in cui sia invece costante, il moto (rettilineo) è detto uniformemente accelerato.

Relazione tra accelerazione e posizione: una nota formale

Dalla relazione differenziale tra accelerazione e velocità e tra questa e la posizione, otteniamo:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Relazioni tra velocità e accelerazione

Abbiamo visto la relazione differenziale tra le due:

$$\mathbf{a(t) = \frac{dv}{dt}} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{dv = a(t)dt}$$

La relazione inversa è la relazione integrale

$$\mathbf{\int_{v0}^{v} dv = v - v_0 = \int_{t0}^{t} a(t)dt}$$

Come per la velocità, questa relazione è utile solo se è nota la dipendenza di *a* da *t*, (p.e. nel moto uniformemente accelerato).

Moto rettilineo uniformemente accelerato

La velocità è funzione lineare del tempo

$$\mathbf{v(t) = v_0 + a\int_{t0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0)}$$

$$\mathbf{v(t) = v_0 \pm a(t - t_0)}$$

L'accelerazione istantanea è uguale alla accelerazione media:

$$\mathbf{a = a_m}$$

Lo spostamento è funzione quadratica del tempo:

$$\mathbf{x(t) = x_0 + \int_{t0}^{t} v(t)dt = x_0 + \int_{t0}^{t} (v_0 + a(t - t_0))dt =}$$

$$\mathbf{= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

$$\mathbf{x(t) = x_0 \pm v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Moto di un grave nel campo di gravità

Come vedremo meglio più avanti, un corpo che cade nel campo di gravità terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante (nel tempo ma non nello spazio) $g=9.81\ m/s^2$.

Il moto del grave è dunque uniformemente accelerato.

Se prendiamo un sistema di riferimento con l'asse y rivolto verso l'alto, l'accelerazione a è negativa: $a=-g$

Moto di un grave nel campo di gravità

Specifichiamo le formule per il moto uniformemente accelerato nel caso di un corpo che cade da altezza *h* con velocità iniziale nulla: $y_0=h,\ v_0=0,\ t_0=0$

$$\mathbf{v(t) = v_0 + a(t - t_0) = -gt} \qquad\qquad \mathbf{y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

La seconda formula ci permette, risolvendo rispetto a *t*, di trovare il tempo in cui il corpo raggiunge il suolo, cioè il punto $x=0$:

$$\mathbf{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Moto di un grave nel campo di gravità

Ora che è noto il tempo di caduta, la prima formula ci permette di trovare la velocità con cui il corpo giunge a terra:

$$\mathbf{v(t) = -\sqrt{2gh}}$$

Spesso si omette il segno meno:

$$\mathbf{v(t) = \sqrt{2gh}}$$

intendendo che ci si riferisce al <u>modulo</u> della velocità.

Moto armonico

In questo caso definiamo il moto direttamente a partire dalla legge oraria della posizione:

$$\mathbf{x(t) = A\sin(\omega t + \phi)}$$

Ove compaiono tre costanti:

A l'ampiezza

ω la pulsazione

ϕ la fase iniziale (cioè al tempo 0)

Poiché la funzione seno è periodica, a due istanti di tempo t_1, t_2, che soddisfano la relazione seguente

$$\mathbf{(\omega t_2 + \phi) - (\omega t_1 + \phi) = \omega(t_2 - t_1) = n2\pi}$$

corrisponderà uno stesso valore della coordinata.

Moto armonico

Quando *n* assume il valore minimo (*n=1*), i due istanti differiscono per un tempo *T* detto <u>periodo</u>

$$\omega(t_2 - t_1) = \omega T = 2\pi$$

Questa relazione è molto importante perché lega la pulsazione al periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

La <u>frequenza</u> è l'inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Soluzione di equazioni differenziali

Risolvere l'equazione differenziale che definisce la velocità significa passare dalla funzione *v* alla funzione *x:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$

Similmente, risolvere l'equazione differenziale che definisce l'accelerazione:

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}$$

significa passare dalla funzione ***a*** alla funzione ***v*.**

Questo passaggio viene fatto mediante un'operazione di integrazione, per cui si dice integrare l'equazione come sinonimo di risolvere.

Soluzione di equazioni differenziali

Più in generale risolvere un'equazione differenziale significa abassarne il grado di derivazione mediante operazioni di integrazione agenti sulle funzioni incognite o su funzioni di queste funzioni.

Questo accade quando, p.e., l'accelerazione è nota non in funzione del tempo, ma della posizione.

Moto armonico

Sappiamo che nel moto armonico, la posizione x(t) è data da:

$$\mathbf{x = A\sin(\omega t + \phi)}$$

Possiamo calcolare la velocità: $$\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}A\sin(\omega t + \phi) = \omega A\cos(\omega t + \phi)}$$

Per l'accelerazione, si ha: $$\mathbf{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\omega A\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)}$$

Verifichiamo quindi che per un moto armonico vale la relazione:
Ovvero tale relazione è valida *se e solo se* il moto è armonico.

$$\mathbf{a = -\omega^2 x}$$

Nuove grandezze fisiche

Per lo studio della dinamica è indispensabile introdurre nuove grandezze fisiche:

Forza, simbolo $\boldsymbol{F}$, unità newton (N)

Massa, simbolo M, unità chilogrammo (kg)

Inoltre:

quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$

impulso $\vec{J} = \int_{t1}^{t2} \vec{F}dt$

momento di forza $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

momento angolare (o della quantità di moto) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv^2$

energia potenziale $U_{21} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$

momento d'inerzia $I = \int_{corpo} r^2 dm$

La forza

Questo concetto trae origine dalla sensazione di sforzo muscolare.

E` poi generalizzato a sistemi meccanici quali per esempio una molla o una leva.

Tutti questi fenomeni sono esempi di azioni a contatto.

La forza può però anche agire a distanza, come nel caso della forza gravitazionale e elettrica.

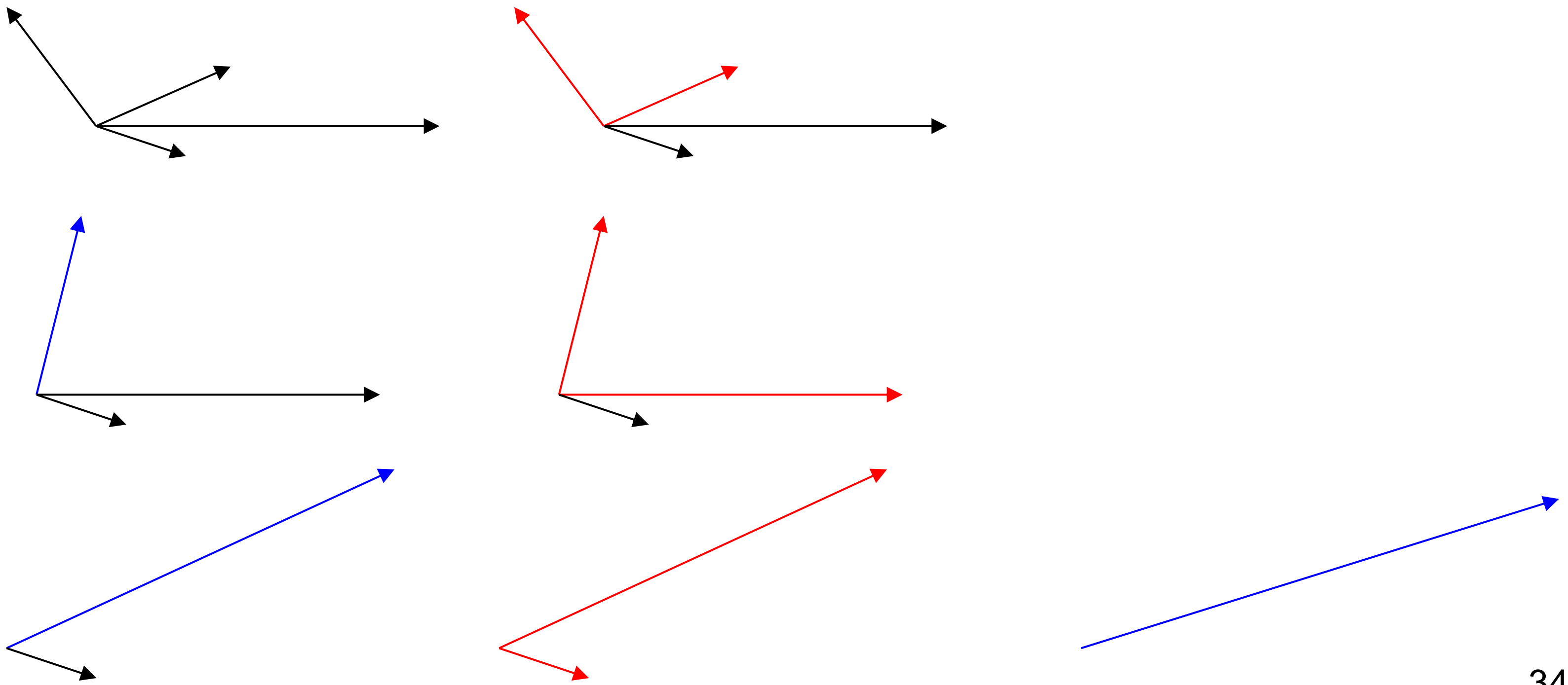
La forza

Nel SI la forza è una grandezza derivata la cui unità è il newton (N).

Definizione di Newton: "*Una forza impressa è un'azione esercitata sul corpo al fine di mutare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*"

La forza

Poiché la forza è una grandezza vettoriale, è possibile sommare diverse forze con la regola del parallelogramma: se le forze sono *n*, è sufficiente applicare la regola *n-1* volte.

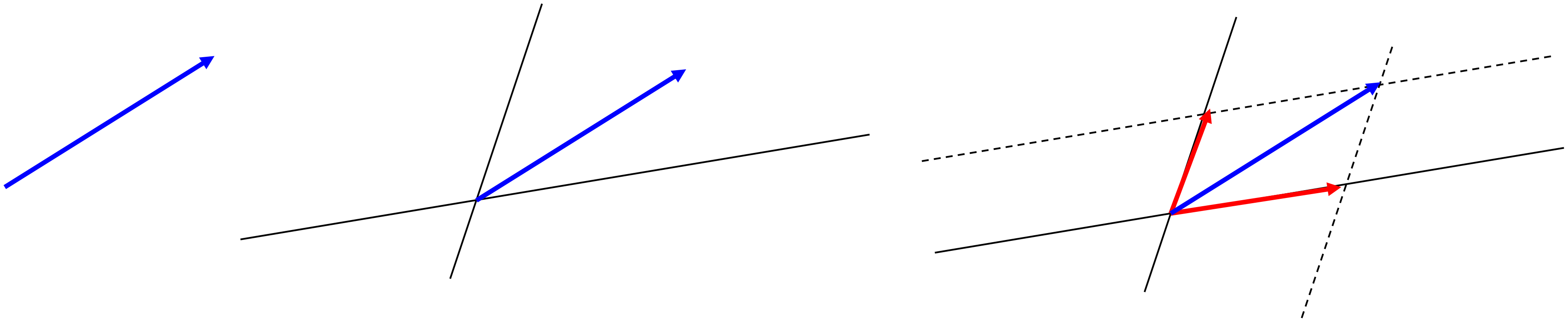


La forza

Oppure, più semplicemente, sistemando i vettori in modo che l’apice del precedente coincida con l’origine del seguente.

La forza

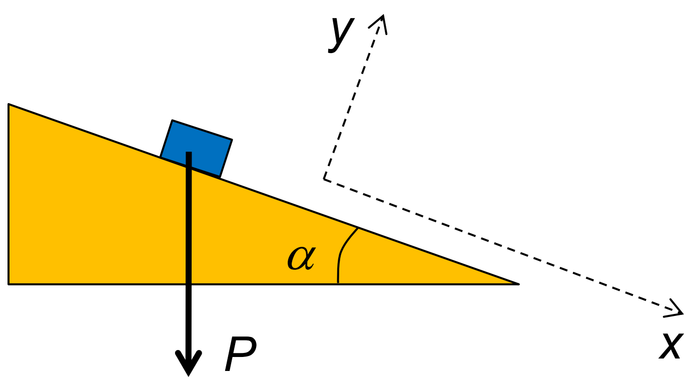
E` inoltre possibile <u>scomporre</u> una forza in un <u>piano</u> lungo <u>due</u> direzioni arbitrariamente scelte.

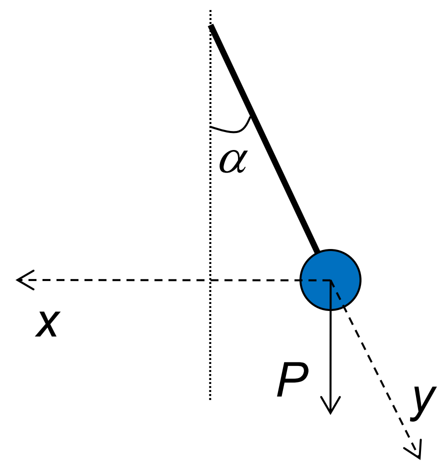


Nello <u>spazio</u> lungo <u>tre</u> direzioni.

Esercizi

1) Scomporre la forza peso in direzione parallela e perpendicolare ad un piano inclinato.





2) scomporre la forza peso di un pendolo nelle direzioni orizzontale e della fune.

La massa

Definizione (I) di Newton: "*La massa o quantità di materia, è data dal prodotto della densità per il volume*".

"*Tale quantità diviene nota attraverso il peso di ciascun corpo*".

"*Per mezzo di esperimenti molto accurati sui pendoli, trovai che è proporzionale al peso*".

$$m_I \propto P = m_G g$$

Quantità di moto

Un corpo di massa *m* e velocità ***v*** ha quantità di moto (QM):

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}}$$

In meccanica relativistica:

$$\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\gamma(\mathbf{v})\vec{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{c}}\right)^{2}}}$$

Il 1° principio della dinamica

Esistono sistemi di riferimento in cui vale la seguente proposizione (Legge I di Newton):

"*Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse*"

E` anche detto principio d'inerzia: il corpo (anche se animato) è del tutto inerte rispetto al suo stato di moto e non può cambiarlo da sé.

Sistemi di riferimento in cui vale questo principio sono detti sistemi inerziali.

Le leggi della dinamica sono applicabili nella loro forma più semplice solo in questi sistemi.

Per sistemi non inerziali (p.e. la superficie terrestre) bisogna tenerne conto di opportune forze inerziali addizionali.

Costanza della massa

In meccanica classica la massa può essere considerata costante a tutti gli effetti.

Il 1° principio della dinamica

Un corpo non soggetto a forze non cambia la propria velocità (vettore velocità).

In assenza di forze il corpo non deve necessariamente <u>stare fermo</u>; ma piuttosto in ogni istante esso mantiene sempre lo stesso stato di moto <u>rettilineo uniforme</u>.

Affinché avvenga un cambiamento di quantità di moto (ovvero di velocità) è necessario che sul corpo agisca una forza.

Più precisamente questa forza è <u>la risultante delle forze</u> con cui l'ambiente agisce sul corpo, ovvero la forza netta

Se sono presenti forze, ma la loro risultante è nulla, la quantità di moto non cambia.

Il 1° principio della dinamica

Il 1° principio stabilisce che se la velocità non è costante, cioè se è presente un'accelerazione, allora necessariamente è presente una forza.

Nella meccanica di Newton la forza è l'ente causale dell'accelerazione.

il 2° principio specifica quantitativamente la relazione tra forza e accelerazione.

Il 2° principio della dinamica

Legge II: "Il cambiamento di <u>moto</u> è *proporzionale* alla forza motrice impressa ed avviene *lungo la linea retta* secondo la quale è stata impressa".

In un sistema inerziale se una forza netta agisce su un corpo, possiamo dunque scrivere:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}}$$

E in altra forma: la forza causa, istante per istante, una variazione di quantità di moto:

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dt}$$

Derivando la QM:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{m}\vec{\mathbf{v}})}{\mathbf{dt}} = \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

Il 2° principio della dinamica

E si ottiene il 2° principio nella nota forma:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

Il che significa che la forza causa un’accelerazione proporzionale alla forza stessa tramite una costante propria del corpo che è la massa inerziale.

Conservazione della quantità di moto

Supponiamo che il punto materiale non sia soggetto a forze:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

allora per il 2° principio, o meglio per il 1° principio, segue che la quantità di moto rimane costante, ovvero <u>si conserva</u> :

$$\Delta\vec{p} = 0 \qquad\qquad \vec{p}_f = \vec{p}_i$$

Indipendenza delle azioni simultanee

Se su un punto materiale agiscono più forze contemporaneamente, l'accelerazione risultante è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto materiale avrebbe se ciascuna forza agisse da sola:

$$\vec{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}} \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\mathbf{m}}$$

Ovvero il moto del punto materiale è uguale a quello che si avrebbe se agisse una sola forza uguale alla somma vettoriale ***R*** delle forze: cioè ciascuna forza agisce <u>indipendentemente</u> dalle altre.

Equilibrio statico

Se la risultante ***R*** delle forze agenti su un punto materiale è nulla e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete e in una condizione di equilibrio statico.

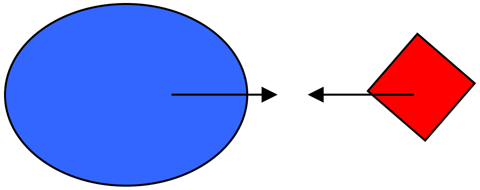
L'annullarsi di ***R*** equivale all'annullarsi di tutte le sue componenti.

Per un sistema cartesiano $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ significa:

$$\mathbf{R_x} = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F_{ix}} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{R_y} = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F_{iy}} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{R_z} = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F_{iz}} = \mathbf{0}$$

Condizione di equilibrio traslazionale

Il 3° principio della dinamica



Consta di due parti

1) Se un corpo A esercita una forza ***F*** su un corpo B, allora il corpo B esercita una forza ***–F*** sul corpo A, ovvero le forze sono uguali in modulo e direzione e contrarie in verso.

Si interpreta anche dicendo che le forze non si presentano mai singole, ma sempre a coppie, cioè sono frutto di una <u>interazione</u> tra i due corpi.

2) Le due forze hanno la stessa retta d'azione, e quindi <u>non producono</u> momento di forza.

Il 3^o principio della dinamica

Per quanto riguarda la forza c'è perfetta simmetria tra i due corpi, indipendentemente da quanto diversi possano essere fra loro (p.e. la Terra e una mela).

Non importa che le forze siano a contatto o a distanza, né che siano attrattive o repulsive.

Fare attenzione che le due forze agiscono sempre su due corpi <u>diversi</u>.

Esercizi

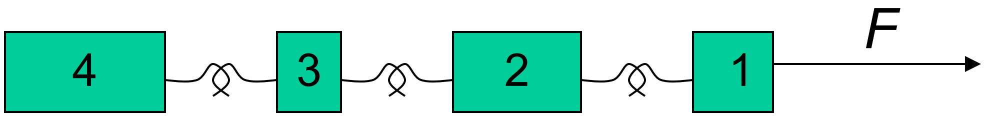
1) due corpi di massa m_1 e m_2 sono posti su un piano orizzontale e sono a contatto come in figura.

Applicando una forza ***F***, parallela al piano, al corpo 1, i due corpi, mantenendosi in contatto, si mettono in moto con una accelerazione ***a***.

Trovare ***a*** e la forza di interazione tra i due corpi.

Esercizi

Quattro corpi di massa m_1, m_2, m_3, m_4, sono disposti come in figura e collegati tramite ganci.



Al corpo 1 viene applicata una forza F

Trovare: a) l'accelerazione del sistema;

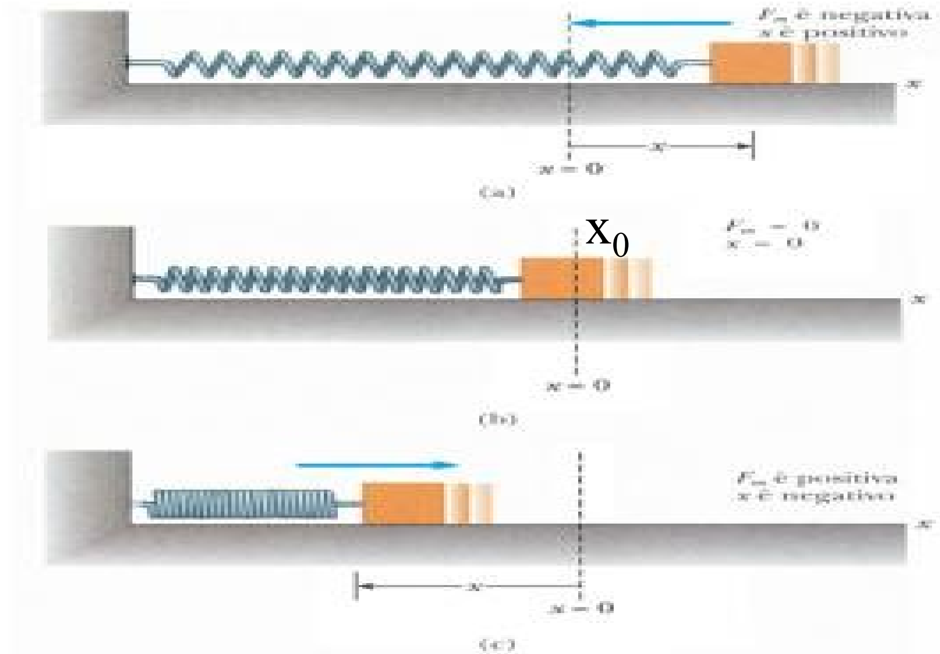
b) la tensione agente sui ganci;

c) la forza agente su ciascun corpo.

Forze comuni

- Elastica;
- Peso;
- Vincolare;
- D'attrito radente statico e dinamico su superficie;
- D'attrito in un fluido.

Forza elastica



allungata

equilibrio

compressa

Una molla non sollecitata ha una lunghezza a riposo x_0 .

Sollecitata da una forza ***F*** si allunga (o si accorcia).

La forza coniugata a ***F*** secondo la 3ª legge, generata dalla molla, è la forza elastica $\boldsymbol{F}_e$.

Per una molla ideale, l'allungamento (o accorciamento) e l'intensità della forza sono proporzionali:

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{k}\Delta\mathbf{x}$$

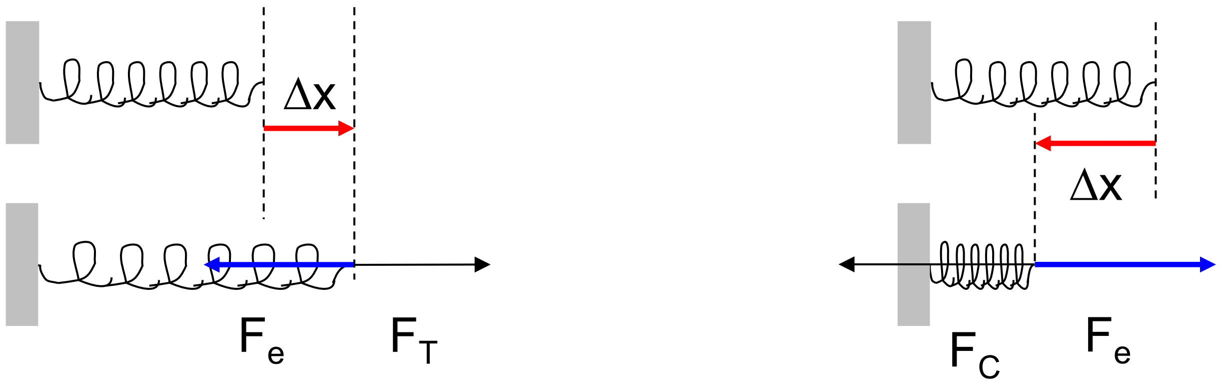
Ove *k* è la costante elastica della molla.

Legge di Hooke

In termini vettoriali: $\vec{\mathbf{F}}_e = -\mathbf{k}\left(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0\right) = -\mathbf{k}\Delta\vec{\mathbf{x}}$

Questa è la legge di Hooke.

Il segno meno indica che la forza, pur avendo ugual direzione, è sempre diretta in verso opposto allo spostamento.



Per ogni molla ciò è valido in un intervallo limitato di intensità di forza che non superi il cosiddetto limite elastico della molla.

Ancora sul moto armonico

Studiamo il moto di un corpo soggetto ad una forza ***F***.

Se ***F*** è la forza di Hooke: $\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k\Delta\vec{x}$

$$m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

Se il moto è vincolato in una dimensione, possiamo scrivere l'equazione dell'unica componente come segue:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

Ancora sul moto armonico

- Ponendo $y=x-x_0$ e sfruttando il fatto ovvio che $$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
- l'equazione del moto diviene: $$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$
- Dividendo i membri per m e ponendo $$\omega^2 = \frac{k}{m}$$
- Otteniamo $$\frac{d^2y}{dt^2} = a = -\omega^2 y$$

Cioè l'equazione che individua il moto armonico.
Abbiamo quindi scoperto che il moto armonico è causato dalla forza elastica.

Dinamometro

E` lo strumento usato per misurare staticamente l'intensità di una forza.

Si basa sulla <u>risposta elastica lineare</u> del materiale usato.

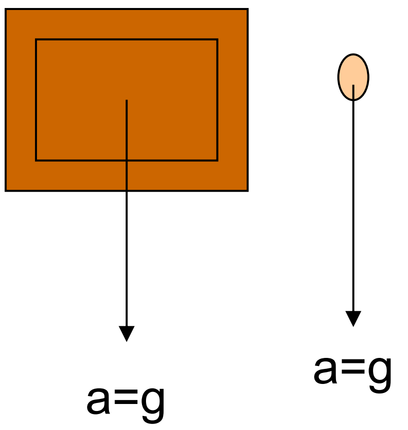
Forza peso

E` la forza con cui la terra attrae i corpi.

La caratteristica fondamentale, scoperta da Galileo, è che qualunque corpo, indipendentemente dal suo peso, cade nel campo di gravità con la stessa accelerazione (in assenza di attrito).

Ovviamente bisogna trascurare dall'azione dell'aria sul corpo in caduta, cioè questa deve avvenire nel vuoto.

$$\mathbf{a = g \equiv 9.8\,m/s^2}$$



Forza gravitazionale

Secondo Newton la forza di gravità è un caso particolare della forza gravitazionale.

Questa agisce tra due corpi qualunque e ha la forma:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{G}\,\frac{\mathbf{m_1 m_1}}{\mathbf{r}^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

ove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi e r la loro distanza e G è la costante di gravitazione universale.

Implicitamente si assume che le dimensioni dei corpi siano trascurabili rispetto alla loro distanza, altrimenti questa non sarebbe definita.

Forza gravitazionale

Il carattere vettoriale della forza è data dal versore –***r***, che significa che la forza è sempre attrattiva.

Nel caso della forza di gravità agente su un corpo di massa *m*, possiamo scrivere:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{G}\frac{\mathbf{Mm}}{\mathbf{R}^2}\hat{\mathbf{R}} = \left(-\mathbf{G}\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}^2}\hat{\mathbf{R}}\right)\mathbf{m} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}}$$

ove *M* è la massa della Terra e *R* il suo raggio (medio).

L'accelerazione di gravità *g* non dipende dal corpo, ma solo dalla massa della Terra *M* e dalla distanza *R* tra il centro della Terra e il corpo.

Ancora sulla massa facoltativo

Consideriamo materia <u>di una sola qualità</u>, per esempio ferro.

Aumentando la quantità di materia, aumenta il peso del corpo nello stesso rapporto.

Si può quindi concludere che <u>peso</u> e <u>quantità di ferro</u> sono proporzionali (secondo una costante α caratteristica del ferro).

$$P_{Fe} = \alpha_{Fe} m_{Fe}$$

Ancora sulla massa facoltativo

- La cosa è più difficoltosa con materia di qualità diversa: come comparare, per esempio, ferro con rame? E in generale materia di densità diversa?

$$\mathbf{P_{Fe} = \alpha_{Fe} m_{Fe}} \qquad \mathbf{P_{Cu} = \alpha_{Cu} m_{Cu}}$$

- Dobbiamo definire come masse uguali di sostanze diverse, quantità di materia che abbiano ugual peso

$$\mathbf{P_{Fe} = P_{Cu} \Rightarrow m_{Fe} = m_{Cu}}$$

- Da cui ne segue che le costanti α sono uguali per tutti i materiali:

$$\mathbf{\alpha_{Fe} = \alpha_{Cu}}$$

- Cioè la terra attira i corpi con una forza che è proporzionale alla massa del corpo, secondo una costante che non dipende dal corpo, ma solo dalla terra

$$\mathbf{P = \alpha m}$$

Ancora sulla massa facoltativo

- Abbiamo introdotto la massa tramite la forza di gravità per cui parleremo di massa <u>gravitazionale</u>

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{m}_{\mathbf{G}}$$

- La massa che entra nella seconda legge di Newton è invece la massa <u>inerziale</u>

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}_{\mathbf{I}} \vec{\mathbf{a}}$$

- In meccanica classica i due concetti di massa sono distinti

Ancora sulla massa facoltativo

- Ricordiamo quanto scriveva Newton: "*Per mezzo di esperimenti molto accurati sui pendoli, trovai che [la massa inerziale] è proporzionale al peso*"

$$\mathbf{m_I \propto P = m_G g}$$

- Questo dato sperimentale che le masse sono proporzionali, ci permette, scegliendo la stessa unità di misura per entrambe, di identificare numericamente le due masse

- Ma nella teoria di Newton manca una ragione per cui le due masse debbano essere la stessa cosa

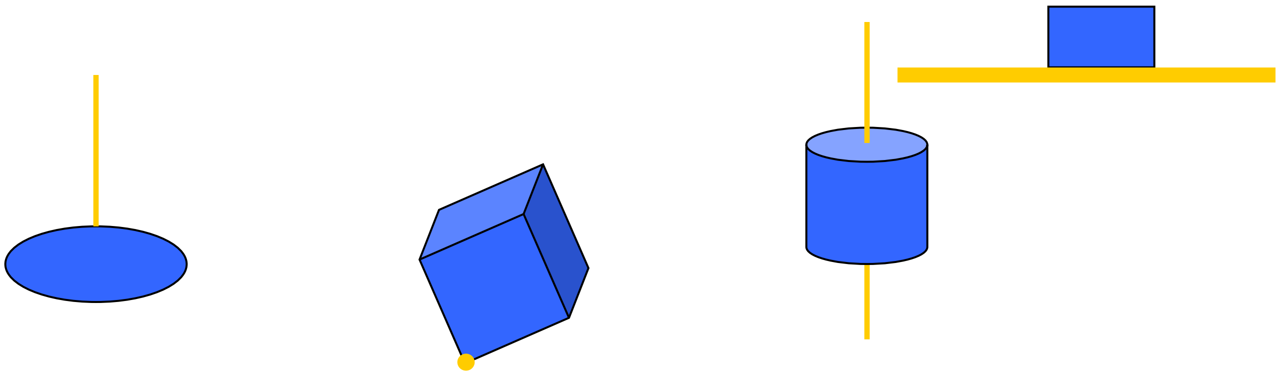
Vincoli

Un vincolo è una qualunque limitazione dell'ambiente al moto del corpo.

Questa limitazione avviene per contatto tra corpo e vincolo.

Esempi:

- una fune
- una superficie d'appoggio o rotaia
- un asse fisso
- un punto fisso



Reazioni vincolari

Il contatto tra corpo e vincolo produce un'interazione che si manifesta sotto forma di forza.

Per il 3° principio la forza con cui il corpo agisce sul vincolo è uguale e contraria a quella, detta reazione vincolare, con cui il vincolo agisce sul corpo.

Le forze vincolari non sono in generale note a priori, ma si possono dedurre a posteriori esaminando il comportamento del sistema.

Reazioni vincolari

Esempio: corpo vincolato in equilibrio statico.

Supponiamo che il corpo sia soggetto, oltre alla forza di vincolo ***V***, ad altre forze di risultante ***R*** diversa da zero.

Se il corpo è in equilibrio statico, allora la risultante di tutte le forze, compresa quella di vincolo, dev'esser nulla:

$$\vec{\mathbf{R}}_{tot} = \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{V}} \equiv \mathbf{0}$$

Da questa relazione possiamo calcolare, a posteriori, la forza di vincolo:

$$\vec{\mathbf{V}} = -\vec{\mathbf{R}}$$

Reazioni vincolari

Generalmente si suppone, almeno in prima approssimazione, che il vincolo sia indeformabile, cioè che riesca a generare la reazione senza deformarsi apprezzabilmente.

Ovviamente è un'idealizzazione: l'assenza di deformazione potrebbe avvenire solamente in assenza di contatto, ma allora la reazione vincolare, che è una forza di contatto, non potrebbe svilupparsi.

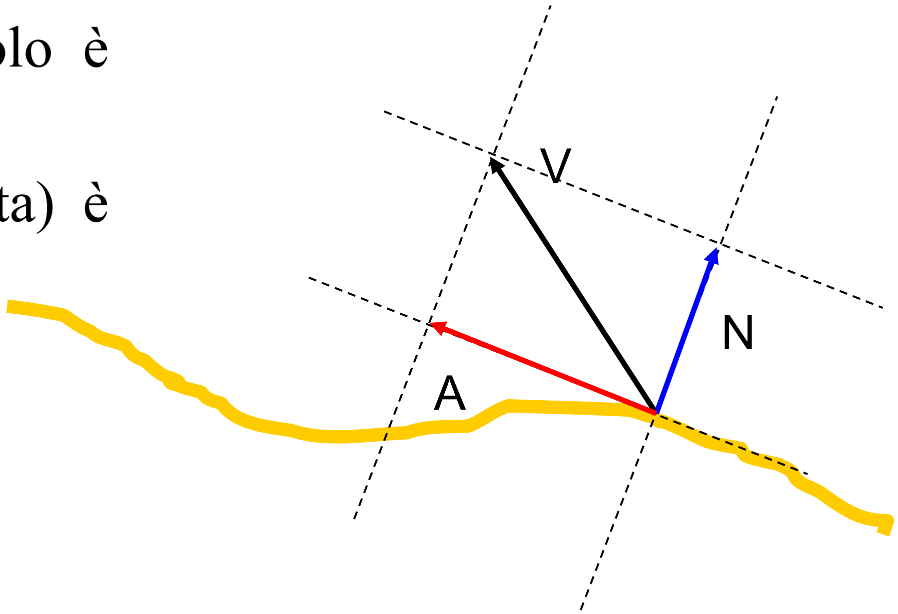
Reazione vincolare di una superficie di appoggio o di una rotaia

La forza ***V*** esercitata dal vincolo può pensarsi scomposta in due componenti, una ***A*** parallela al vincolo e una ***N*** perpendicolare.

La forza *A* è dovuta all'attrito con la superficie: se è presente, il vincolo è detto <u>scabro</u>.

Se è assente (situazione idealizzata) è detto <u>liscio</u>.

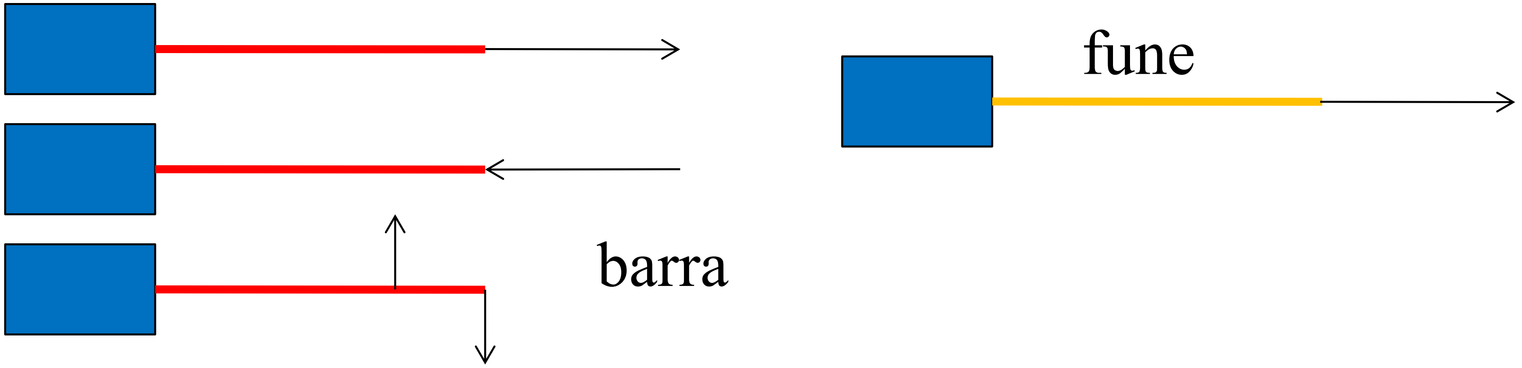
In questo caso *V* si riduce a *N*.



Fili e funi

Fili e funi sono oggetti che trasmettono la forza solo in trazione.

Al contrario le barre possono trasmettere la forza sia in trazione, sia in compressione, che in sforzo di taglio.



Spesso supporremo per semplicità che le funi siano:

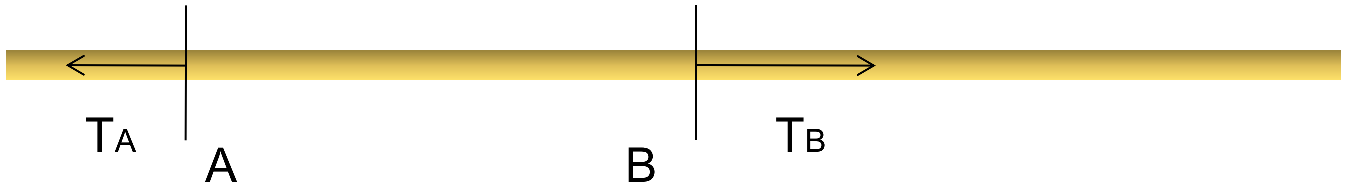
inestensibili (cioè la lunghezza non cambi) e

di massa trascurabile.

Tensione di una fune in quiete

Sia data una fune in equilibrio statico, tesa mediante due forze ***Fs*** e ***Fd*** applicate ai suoi capi:

Consideriamo due sezioni arbitrarie A e B e sia *m* la massa della fune compresa tra le due sezioni:



Tensione di una fune in quiete

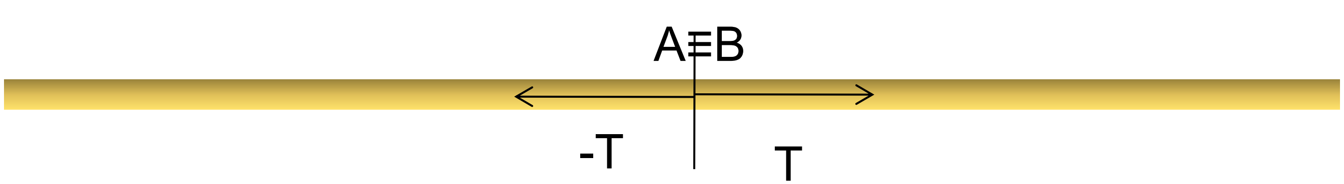
A causa della condizione di equilibrio statico (cioé $\boldsymbol{a}$=0), abbiamo:

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{0}$$

Ne segue che le tensioni $\boldsymbol{T_A}$ che agisce sulla sezione A e $\boldsymbol{T_B}$ che agisce sulla sezione B devono essere uguali in modulo e opposte in verso:

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}}$$

Se sovrapponiamo A a B troviamo che le tensioni sui due lati di una sezione sono uguali e contrarie:



Tensione di una fune in quiete

Dall'arbitrarietà di A e B, segue che la tensione statica di una fune ha ugual valore *T* (in modulo) in ogni punto della stessa.

In particolare ciò vale anche alle estremità, per cui:

$$\mathbf{F_s = F_d = T}$$

Cioè le forze esterne che tendono la fune sono uguali, in modulo, alla tensione della fune.

La tensione della fune a ciascuna estremità è la forza coniugata per il 3° principio alla forza esterna che la tende.

Tensione di una fune in movimento

Ripetendo il ragionamento per una fune in movimento, abbiamo:

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

Ora le tensioni nelle due sezioni non sono più uguali fra loro: ciò è dovuto al fatto che per accelerare la fune è necessario che una tensione sia maggiore dell'altra.

Se A e B coincidono, però, le tensioni sui due lati di una sezione sono uguali e contrarie anche nel caso dinamico.

Solo se ammettiamo che la massa della fune sia trascurabile, possiamo concludere che, almeno in prima approssimazione, la tensione ha ugual valore in ogni punto della fune, come nel caso statico.

Tensione di una fune in movimento

E` solo in questa approssimazione che possiamo concludere che le forze esterne che tendono la fune ***Fs*** e ***Fd*** sono uguali, in modulo, alla tensione della fune.

Come nel caso statico, la tensione della fune a ciascuna estremità è la forza coniugata per il 3º principio alla forza esterna che la tende.

Da notare che le considerazioni fatte sulla fune in movimento si applicano se il moto è accelerato.

$$\vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{T}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$$

Se il moto è uniforme, $\boldsymbol{a}=0$ e ci si riduce al caso statico precedentemente considerato.

Inestensibilità

Questa ipotesi semplificativa significa che due punti arbitrari della fune A e B <u>mantengono la loro distanza</u> indipendentemente dal fatto che siano in quiete o in moto (accelerato).

Questo implica che abbiano <u>velocità uguali</u> e <u>accelerazioni uguali</u>:

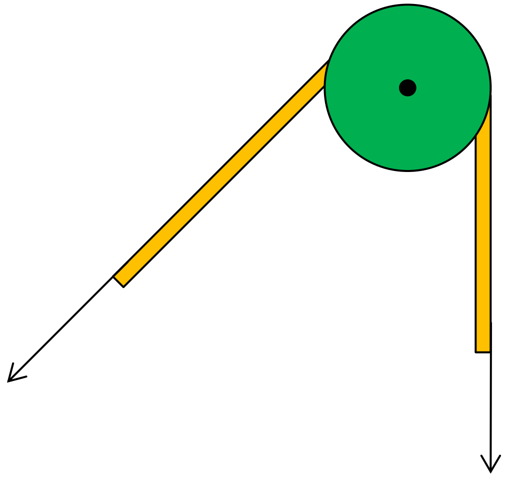
$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_B$$

$$\vec{\mathbf{a}}_A = \vec{\mathbf{a}}_B$$

Carrucole

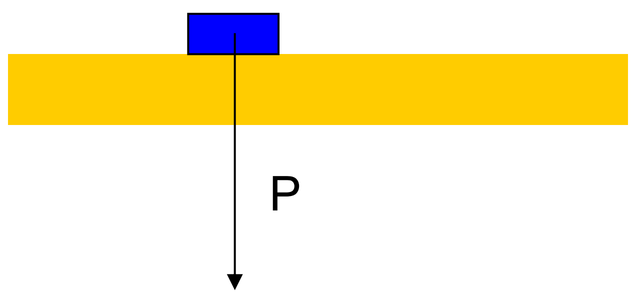
Le considerazioni svolte possono essere estese al caso in cui siano presenti carrucole e quindi la fune cambi direzione.

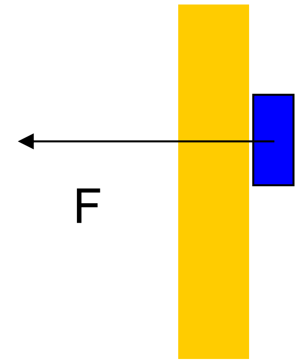
Dobbiamo aspettare di introdurre il momento di forza.



Attrito su superficie o rotaia

Che il corpo sia in quiete (caso statico) o in moto (caso dinamico), il fenomeno dell'attrito ha origine dalle forze di coesione che si stabiliscono nel contatto tra i materiali di cui sono costituiti il corpo e la superficie d'appoggio, premuti l'uno contro l'altro (dalla forza peso del corpo o da altre forze opportune).





Attrito statico su superficie

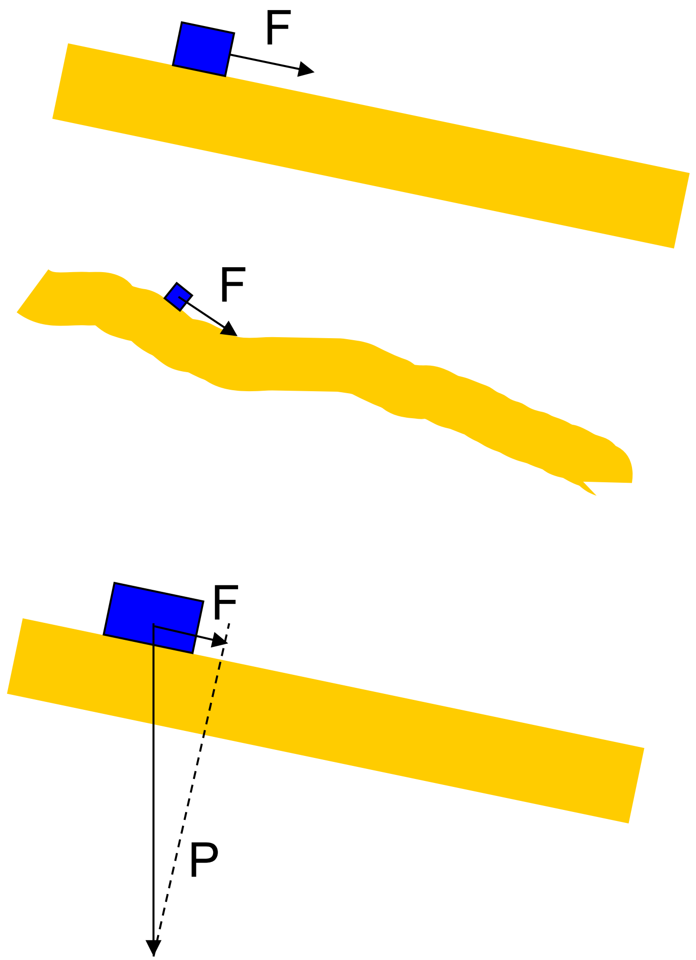
Ad un corpo posto su un piano orizzontale applichiamo una forza ***F*** parallela al piano.

Sperimentalmente si vede che il corpo non si mette in movimento fintanto che l'intensità di ***F*** non diventa maggiore di un valore di soglia minimo.

Attrito statico su superficie

Si può estendere il ragionamento anche a piani non orizzontali e a superfici qualunque.

La forza ora può essere dovuta <u>tutta o in parte</u> alla componente ***F***, della forza peso ***P***, parallela (localmente) alla superficie.

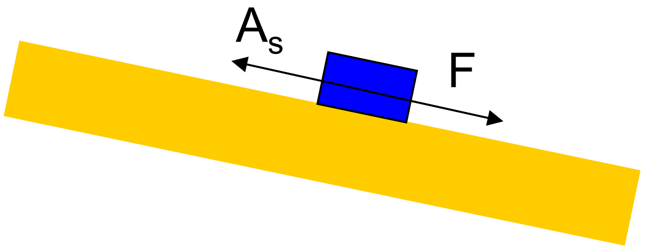


Attrito statico su superficie

Se consideriamo vero il 2° principio, dobbiamo dunque ammettere che la superficie agisce sul corpo con una forza $\boldsymbol{A}_s$ uguale e contraria a $\boldsymbol{F}$ che garantisca l'equilibrio statico del corpo.

Tale forza è detta d'attrito statico.

Non è nota a priori, ma si ricava dalla condizione di equilibrio statico da cui:



$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{A}}_s = 0 \qquad \vec{\mathbf{A}}_s = -\vec{\mathbf{F}}$$

Attrito statico su superficie

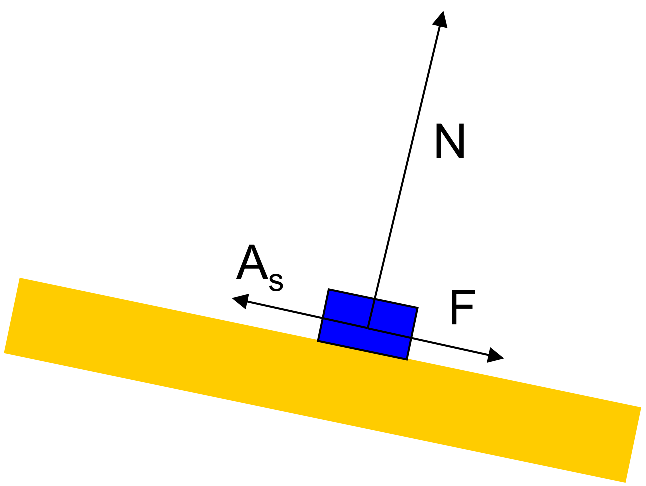
Indico con A_s^{max} il massimo valore della la forza di attrito che la superficie può sviluppare:

$$\mathbf{A_s^{max} = \mu_s N}$$

Si trova sperimentalmente che, almeno in prima approssimazione, la forza non dipende dall'area di contatto col vincolo.

μ_S è il coefficiente di attrito statico e N è il modulo della componente, della reazione vincolare, normale (localmente) alla superficie.

Il coefficiente μ_s dipende dai materiali e dalla lavorazione delle superfici a contatto.



Attrito statico su superficie

Attenzione: l'equazione $$\mathbf{A}_s^{max} = \mu_s \mathbf{N}$$

è <u>un'equazione tra moduli</u>, che non si estende ai vettori, è sbagliato perciò scrivere:

$$\cancel{\vec{\mathbf{A}}_s^{max} = \mu_s \vec{\mathbf{N}}}$$

perché $\boldsymbol{A}_s$ e $\boldsymbol{N}$ sono sempre perpendicolari fra loro.

$\boldsymbol{A}_s$ ha sempre la stessa direzione e <u>verso opposto</u> a $\boldsymbol{F}$.

<u>Inoltre</u> l'equazione dice qualcosa <u>solo sul valore massimo</u> della forza d'attrito, non sul valore che, di volta in volta, equilibra la forza $\boldsymbol{F}$.

Attrito statico su superficie

Avremo quindi la <u>condizione di equilibrio statico</u>:

$$\mathbf{F \le A_s^{max} = \mu_s N}$$

E la <u>condizione di moto</u>:

$$\mathbf{F > A_s^{max} = \mu_s N}$$

Attrito dinamico su superficie

Il valore massimo della forza di attrito statico ci fornisce l'importante informazione su quando l'equilibrio statico non è più possibile e il corpo comincia a muoversi.

Abbiamo allora a che fare con una forza d'attrito dinamico.

Si trova sperimentalmente che, almeno in prima approssimazione,

$$\mathbf{A_d = \mu_d N}$$

e la forza non dipende dalla velocità del corpo o dall'area di contatto col vincolo.

μ_d è il coefficiente di attrito dinamico e dipende dai materiali e dalla lavorazione delle superfici a contatto.

Attrito dinamico su superficie

Attenzione: l'equazione $\mathbf{A_d = \mu_d N}$

è <u>un'equazione tra moduli</u>, che non si estende ai vettori e pertanto è sbagliato scrivere:

$$\cancel{\vec{\mathbf{A}}_\mathbf{d} = \mu_\mathbf{d} \vec{\mathbf{N}}}$$

Dato che A_d e N sono sempre perpendicolari fra loro.

A_d ha sempre la stessa direzione e <u>verso opposto</u> alla velocità.

<u>A differenza del caso statico</u> ora l'equazione dice qual è il valore della forza d'attrito, che istante per istante agisce sul corpo.

L'equazione del moto è:

$$\boxed{\mathbf{F - A_d \equiv F - \mu_d N = ma}}$$

Coefficienti di attrito

Data la coppia corpo-vincolo il coefficiente di attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico:

$$\boxed{\mu_s > \mu_d}$$

Ciò significa che al momento del distacco la forza d'attrito dinamico è minore della massima forza d'attrito statico:

$$A_s^{max} > A_d$$

Forza di attrito viscoso

Come per l'attrito dinamico, è sempre opposta alla velocità.

E` proporzionale alla velocità del corpo:

$$\boxed{\vec{F} = -b\vec{v}}$$

Ha luogo nel moto di un corpo in un fluido in particolari condizioni, generalmente a basse velocità.

Per velocità più elevate la forza d'attrito esercitata dal fluido assume forme più complicate.

Forza di attrito viscoso facoltativo

- Esercizio di cinematica: troviamo la legge oraria integrando l'equazione del moto e supponendo che il corpo abbia inizialmente (cioè a $t=0$) velocità $v(0)$

$$\mathbf{m\vec{a} = \vec{F} = -b\vec{v}}$$

- Usiamo la relazione differenziale tra ***a*** e ***v***:

$$\frac{\mathbf{d\vec{v}}}{\mathbf{dt}} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}}\mathbf{\vec{v}}$$

- Se è presente solo la forza d'attrito, si può ridurre il moto ad una dimensione e l'equazione per la componente dei vettori in tale direzione è:

$$\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}}\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{v}}{\boldsymbol{\tau}}$$

- Ove si è introdotta una costante τ con le dimensioni del tempo

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{b}}$$

Forza di attrito viscoso facoltativo

L'equazione si risolve per separazione delle variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

e integrando tra l'istante iniziale e finale: $$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\tau}$$

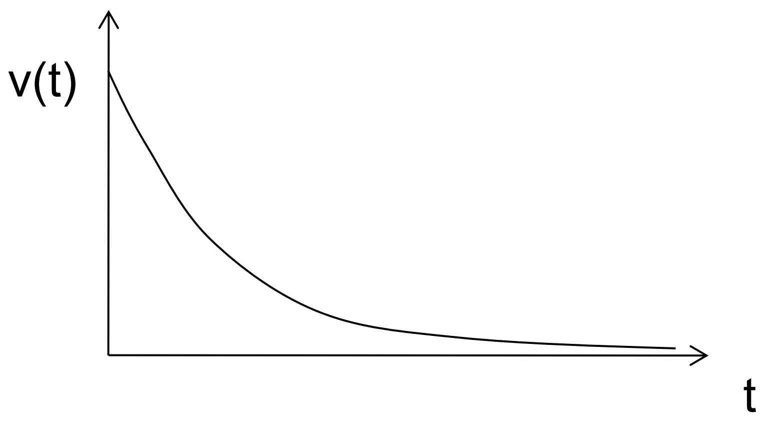
Da cui ponendo $t_1=0$ e $t_2=t$ e passando agli antilogaritmi:

$$\log \frac{v(t_2)}{v(t_1)} = -\frac{t_2 - t_1}{\tau}$$

$$v(t) = v(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Forza di attrito viscoso facoltativo

Questa equazione oraria ci dice che la velocità del corpo decresce esponenzialmente nel tempo:



Una variante interessante si ha nella caduta di un grave in un mezzo con attrito viscoso.

Impulso

- Dalla II legge abbiamo: $\vec{\mathbf{F}}\mathbf{dt} = \mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}$

- Integrando su di un intervallo di tempo finito: $\int_0^t \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dt} = \int_{\vec{\mathbf{p}}_0}^{\vec{\mathbf{p}}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}$

- Il primo membro definisce una nuova grandezza dinamica *J* detta **impulso**; il secondo membro è semplicemente la variazione della quantità di moto nell'intervallo di tempo considerato:

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}_0 = \Delta\vec{\mathbf{p}}$$

- Questo risultato è detto teorema dell'impulso che si può riscrivere in termini della velocità:

$$\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{m}\Delta\vec{\mathbf{v}}$$

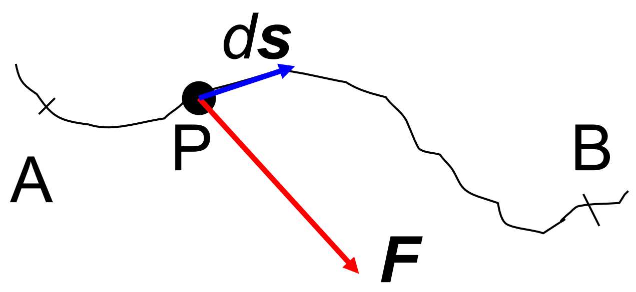
- L'impulso sarà usato quando studieremo gli urti.

Lavoro

Supponiamo di avere un punto materiale P di massa *m*, soggetto ad una forza ***F***.

Supponiamo di spostarlo da un punto dello spazio A ad un punto B.

Il lavoro svolto dalla forza ***F*** nello spostamento di P da A a B è una grandezza meccanica scalare definita come:



$$\mathbf{W_{AB}} = \int_{A}^{B} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

Lavoro

- Le dimensioni fisiche del lavoro sono:

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{F}]\mathbf{L} = \mathbf{ML^2T^{-2}}$$

- E l'unità di misura è il newton metro:

$$[\mathbf{W}] = \mathbf{N} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{J}$$

- che prende il nome di joule (J).

Principio di sovrapposizione

- Se la forza è la risultante di *n* forze: $\vec{F} = \sum_{k=1,\ldots n} \vec{F}_k$
- Si può applicare il principio di sovrapposizione per calcolare il lavoro

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\sum_{k=1,\ldots n} \vec{F}_k \right) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\sum_{k=1,\ldots n} \vec{F}_k \cdot d\vec{s} \right) =$$

$$= \sum_{k=1,\ldots n} \int_A^B \left(\vec{F}_k \cdot d\vec{s} \right) = \sum_{k=1,\ldots n} W_k$$

- Cioè il lavoro complessivo è uguale alla somma dei lavori delle singole forze.

Potenza

La potenza media è una grandezza meccanica scalare definita come il rapporto tra il lavoro compiuto e l'intervallo di tempo impiegato.

Grandezza importante per caratterizzare le prestazioni di una macchina:

$$\mathbf{P = \frac{W}{t}}$$

Accanto alla potenza media è definita la potenza istantanea:

$$\mathbf{P = \frac{dW}{dt}}$$

Potenza

Le dimensioni fisiche della potenza sono:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{W}] / \mathbf{T} = \mathbf{ML^2T^{-3}}$$

E l'unità di misura è il joule al secondo:

$$[\mathbf{P}] = \mathbf{J / s = W}$$

che prende il nome di watt (W).

Potenza

Dall'espressione infinitesima del lavoro, possiamo scrivere la potenza come:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{dW}}{\mathbf{dt}} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Energia cinetica

Consideriamo il lavoro infinitesimo e riscriviamolo usando la 2ª legge:

$$\mathbf{dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}}$$

Per trovare il valore del prodotto scalare differenziamo i due membri dell'identità seguente:

$$\mathbf{d\left(\vec{v}^2\right) \equiv d\left(v^2\right)}$$

$$\mathbf{d\left(\vec{v}^2\right) = d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}} \qquad \mathbf{d\left(v^2\right) = 2vdv}$$

Da cui:

$$\mathbf{\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d\left(v^2\right)}$$

Energia cinetica

Abbiamo infine $$\mathbf{dW = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$$

Per una variazione finita dobbiamo integrare tra il punto iniziale e il punto finale

$$\mathbf{W = \int_A^B dW = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

La quantità: $\boxed{\mathbf{K = \frac{1}{2}mv^2}}$ prende il nome di <u>energia cinetica</u>.

$$\boxed{\mathbf{W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A}}$$

Teorema dell'energia cinetica

Il teorema appena dimostrato è detto teorema dell'energia cinetica: il lavoro fatto dalla forza sul punto materiale è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo stesso.

$$\mathbf{W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A}$$

Energia cinetica e lavoro

- Il lavoro è conseguenza dell'interazione del sistema con l'ambiente.

- Si parla pertanto di lavoro <u>scambiato</u> tra sistema e ambiente e <u>non</u> di lavoro <u>posseduto</u> dal sistema.

- Si parla invece di energia <u>posseduta</u> dal sistema.

Energia cinetica

Troviamo le dimensioni dell’energia cinetica.

$$[\mathbf{K}] = \mathbf{M}[\mathbf{V}^2] = \mathbf{ML}^2\mathbf{T}^{-2}$$

Sono ovviamente uguali a quelle del lavoro.

L’unità di misura dell’energia è, di nuovo, il joule.

Lavoro della forza peso

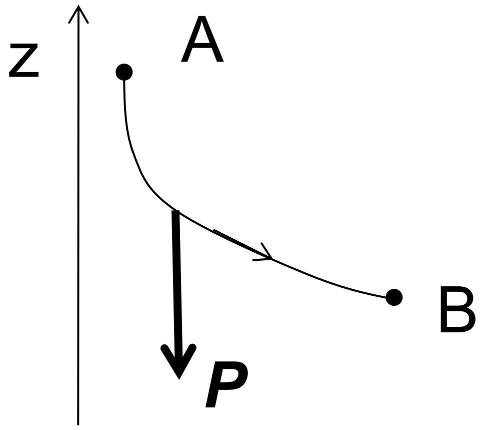
Dato un punto di massa m nel campo di gravità, il lavoro del peso nello spostamento da un punto A ad un punto B è:

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

Siccome $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$ è costante e $\boldsymbol{g}$ ha solo componente z, pari a $-g$, abbiamo:

$$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{P}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{AB}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}} \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}}\right) = -\mathbf{mg}\left(\mathbf{z}_{\mathbf{B}} - \mathbf{z}_{\mathbf{A}}\right) = \mathbf{mg}(\mathbf{z}_{\mathbf{A}} - \mathbf{z}_{\mathbf{B}})$$

Il lavoro non dipende dalla traiettoria seguita dal punto per andare da A a B, ma solo dagli estremi A e B.



Energia potenziale

Introducendo la nuova grandezza: $\mathbf{U = mgz}$

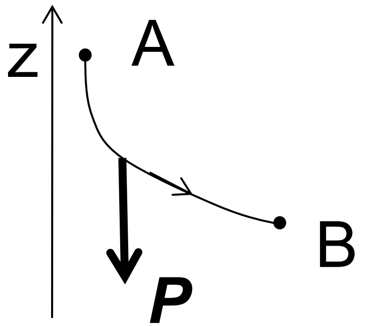
(omogenea ad un'energia)

il lavoro diventa:

$$\mathbf{W = -mg(z_B - z_A) = -mgz_B + mgz_A = -(U_B - U_A)}$$

U prende il nome di energia potenziale della forza peso.

Il lavoro è dunque uguale all'opposto della variazione di energia potenziale tra stato finale e stato iniziale.



Si osservi che, in questo caso, $U_B<U_A$ e quindi $W>0$

Lavoro della forza elastica

Dato un punto di massa *m* soggetto ad una forza elastica, il lavoro nello spostamento da un punto A ad un punto B è:

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} -\mathbf{k}\vec{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{x}} = -\mathbf{k}\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{x}\,\mathbf{dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{k}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{2}} - \mathbf{x}_{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{2}}\right)$$

Energia potenziale (elastica)

Introducendo la nuova grandezza:

$$\mathbf{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

(omogenea ad un'energia) il lavoro diventa:

$$\mathbf{W = -\frac{1}{2}k\left(x_B{}^2 - x_A{}^2\right) = -\frac{1}{2}kx_B{}^2 + \frac{1}{2}kx_A{}^2 = -\left(U_B - U_A\right)}$$

U prende il nome di energia potenziale della forza elastica.

Il lavoro è, di nuovo, uguale all'opposto della variazione di energia potenziale tra stato finale e stato iniziale.

Lavoro della forza d'attrito

Dato un punto di massa *m* soggetto ad una forza d'attrito dinamica, il lavoro nello spostamento da un punto A ad un punto è:

$$\mathbf{W} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} -\mu_{\mathbf{d}} \mathbf{N} \widehat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}}$$

La direzione della forza è opposta a quella dello spostamento. Il lavoro è (supposta *N* costante):

$$\mathbf{W} = -\mu_{\mathbf{d}} \mathbf{N} \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{s}} = -\mu_{\mathbf{d}} \mathbf{N} \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{ds} = -\mu_{\mathbf{d}} \mathbf{NS}$$

<u>Il lavoro della forza d'attrito è sempre negativo</u>: se si cambia il verso dello spostamento, anche la forza cambia verso.

Lavoro della forza d'attrito

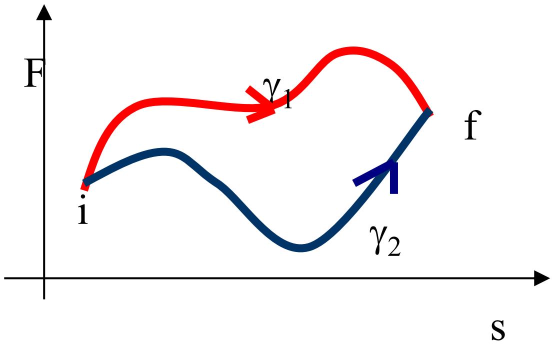
Poiché il lavoro della forza d'attrito dipende da **S**, la lunghezza del percorso fatto dal punto, il lavoro dipende dalla traiettoria e **non solo** dai punti estremi A e B.

A differenza del caso della forza peso ed elastica, non è ora possibile esprimere il lavoro come differenza tra i valori che una funzione della posizione assume negli estremi.

Forze conservative

Una forza si dice conservativa se il lavoro dipende solo dalle coordinate dei punti iniziale e finale e non dal percorso fatto.

$$\int_{\gamma_1}^{i\to f} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2}^{i\to f} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$



Inoltre se si cambia il verso di percorrenza, l'integrale cambia segno (ciò è dovuto al fatto che il prodotto scalare cambia segno).

$$\int_{C}^{A\to B} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{C}^{B\to A} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Forze conservative

Se calcoliamo il lavoro <u>lungo un percorso chiuso</u>:

$$\mathbf{C = C_1 \bigcup C_2}$$

otteniamo zero: questo è un modo alternativo di esprimere lo stesso fatto.

$$\oint_{C} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \oint_{C_1 \cup C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{C_1}^{A \to B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{C_2}^{B \to A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{C_1}^{A \to B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} - \int_{C_2}^{A \to B} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$$

Forze siffatte si dicono **conservative**.

Forze dissipative

Le forze di attrito non soddisfano questi requisiti, abbiamo infatti visto che il lavoro che producono è sempre negativo.

Queste forze si dicono **dissipative**.

Energia potenziale

Per le forze conservative **esiste** dunque una funzione ***U*** delle coordinate degli stati iniziale e finale, cui diamo il nome di **energia potenziale:**

$$\mathbf{\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W}$$

In termini infinitesimi:

$$\mathbf{dU = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dW}$$

Energia meccanica

Ricordiamo il teorema dell'energia cinetica, che vale per una forza qualunque:

$$\mathbf{W = K_B - K_A}$$

Per forze conservative vale inoltre:

$$\mathbf{W = -U_B + U_A}$$

Confrontando le due equazioni troviamo:

$$\boxed{\mathbf{K_A + U_A = K_B + U_B}}$$

Conservazione dell'energia meccanica

Introducendo la nuova grandezza:

$$\mathbf{E = K + U}$$

che chiamiamo energia meccanica.

L'equazione diventa:

$$\mathbf{E_A = E_B}$$

Ciò significa che **l'energia meccanica** (cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale) di un punto materiale soggetto a forze conservative **si conserva**.

Lavoro nel caso generale

Se sono attive sia forze conservative che non conservative, il lavoro è:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W_c} + \mathbf{W_{nc}}$$

Applicando il teorema dell'energia cinetica (sempre valido):

$$\mathbf{W} = \mathbf{K_B} - \mathbf{K_A}$$

Ed esprimendo il lavoro conservativo in termini di energia potenziale:

$$\mathbf{W_c} = -\mathbf{U_B} + \mathbf{U_A}$$

Otteniamo per il lavoro non conservativo $\mathbf{W_{nc}} = \mathbf{E_B} - \mathbf{E_A}$

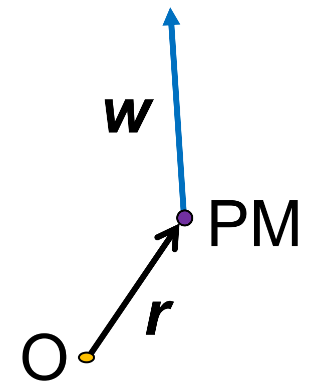
Cioè: **se vi sono forze non conservative** <u>**l'energia meccanica non si conserva**</u> **e** <u>**la sua variazione è uguale al lavoro di tali forze**</u>

Vettori momento

Per alcune grandezze vettoriali **w**, associabili al punto materiale, possiamo definire grandezze vettoriali derivate che sono i momenti di **w**.

Per questo occorre scegliere un punto arbitrario dello spazio, detto **polo**, rispetto a cui è definito il vettore posizione ***r*** del punto materiale.

Il momento di una grandezza ***w*** è definito come il prodotto vettoriale



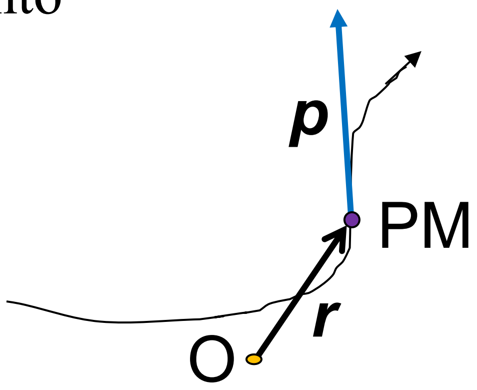
$$\boxed{\vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{w}}}$$

Il polo non necessariamente dev'essere fermo.

Momento angolare

E` il momento del vettore quantità di moto del punto materiale:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$



E` una grandezza vettoriale perpendicolare

sia a ***r*** che a ***p.***

Dimensioni fisiche: $$[L] = L[p] = L^2T^{-1}M$$

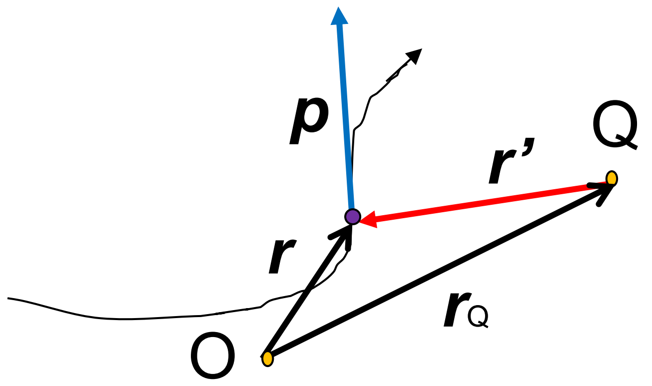
Unità di misura: $$u(L) = kg \cdot m^2 / s = N \cdot m \cdot s$$

Cambiamento di polo facoltativo

Cambiando polo il momento angolare diviene:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{r}}' \times \vec{\mathbf{p}} = \left(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{Q}}\right) \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{Q}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}} - \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{Q}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

Il valore del momento <u>dipende</u> dunque <u>dal polo scelto</u>



Momento di forza

Il momento del vettore forza agente sul punto materiale rispetto al polo O è definito:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

E` una <u>grandezza vettoriale</u> perpendicolare sia a ***r*** che a ***F*:**

Dimensioni fisiche: $$[\tau] = L[F] = L^2T^{-2}M$$

Unità di misura: $$u(\tau) = kg \cdot m^2 / s^2 = N \cdot m$$

Se si cambia polo il momento diviene:

$$\vec{\tau}_Q = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} - \vec{r}_Q \times \vec{F} = \vec{\tau}_O - \vec{r}_Q \times \vec{F}$$

Momento risultante

Vale il principio di sovrapposizione: se la forza complessiva ***R*** è la risultante di più forze applicate tutte allo stesso punto materiale:

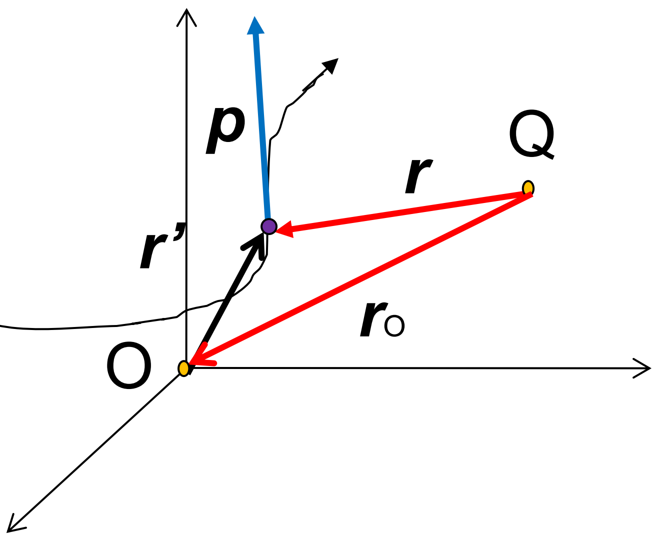
$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right) = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$

il momento risultante (cioè la somma dei momenti di tutte le forze) è uguale al momento della risultante (cioè al momento della somma di tutte le forze).

Teorema del momento angolare

Calcoliamo la derivata temporale del momento angolare di un punto materiale:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$



Se il polo Q è fisso rispetto al sistema di riferimento, allora la derivata temporale di ***r*** è uguale alla velocità del punto e se il sistema è inerziale la derivata di ***p*** è uguale alla forza agente sul punto:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Teorema del momento angolare

Il primo prodotto vettoriale è nullo, il secondo è il momento di forza (calcolato rispetto allo stesso polo), quindi otteniamo il teorema del momento angolare (MA):

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q}$$

Conservazione del momento angolare

Se il momento di forza è nullo (rispetto al polo scelto) allora il momento angolare si conserva (rispetto allo stesso polo) e viceversa:

$$\mathbf{se} \quad \vec{\tau}_Q = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_Q = \mathbf{const.}$$

Momento dell'impulso

Riscriviamo il teorema del momento angolare in forma differenziale:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{dt} = \mathbf{d}\vec{\mathbf{L}}$$

Integriamo da un'istante iniziale ad uno finale:

$$\int_0^t \vec{\boldsymbol{\tau}}\mathbf{dt} = \int_0^t \mathbf{d}\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_f - \vec{\mathbf{L}}_i$$

Ciò significa che per produrre una variazione di momento angolare è necessaria l'azione, su un intervallo di tempo, di un momento di forza.

Momento dell'impulso

Nel caso degli urti, la variazione di momento angolare si può esprimere in termini dell'impulso dalla forza (purché l'intervallo di tempo sia abbastanza piccolo affinché il vettore ***r*** non cambi apprezzabilmente):

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{i}} = \int_{0}^{t} \vec{\boldsymbol{\tau}}\,\mathbf{dt} = \int_{0}^{t} \left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right)\mathbf{dt}$$

Questo è il teorema del momento dell'impulso:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{i}} = \int_{0}^{t} \left(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\right)\mathbf{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \int_{0}^{t} \vec{\mathbf{F}}\,\mathbf{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}$$

URTI

Quando la risultante delle forze agenti su un sistema è nulla, il vettore quantità di moto è costante.

Negli **urti** oltre all'energia totale, si conserva **sempre** la quantità di moto. L'urto si definisce:

URTO

- **Elastico:** si conserva anche l'energia cinetica
- **Anelastico:** non si conserva l'energia cinetica
- **Completamente anelastico:** non si conserva l'energia cinetica e dopo l'urto i due corpi diventano un unico corpo